ΛΥΣΗ

α)

i. Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης «Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης», περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

$1^η$ \ $2^η$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ο δ.χ. αποτελείται από τα παραπάνω 36 διατεταγμένα ζεύγη.

ii. Ο αριθμός 6 γράφεται: $6 = 1\cdot6$ ή $6 = 2\cdot3$. Οπότε θα πρέπει να έχουμε στις 2 ρίψεις του ζαριού τις ενδείξεις (1,6) ή (6,1) και (2,3) ή (3,2). Δηλαδή:

Α = { (1,6), (6,1), (2,3), (3,2)}

Για το ενδεχόμενο Β θα πρέπει το $2^ο$ στοιχείο κάθε ζεύγους να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο $1^ο$ στοιχείο, δηλαδή είναι τα σκιασμένα γκρι κελιά του παραπάνω πίνακα.

Β = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)}

Γ = {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}

iii. Α$\cup$Γ = { (1,6), (6,1), (2,3), (3,2), (1,4), (4,1)} και

Β-Γ= { (1,2), (1,3), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)}.

Επειδή πρόκειται για ένα συνηθισμένο ζάρι, θεωρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι εξίσου πιθανά.

Επομένως $P(A\cup\Gamma) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A\cup\Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B-\Gamma) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } B-\Gamma}{\text{πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}} = \frac{13}{36}$

β)

i. Ο δ.χ. του προηγούμενου πειράματος έχει 36 στοιχεία, αφού στην $1^{η}$ ρίψη έχουμε 6 δυνατά αποτελέσματα και κάθε ένα από αυτά τα 6 αποτελέσματα υπάρχουν επίσης 6 δυνατά αποτελέσματα στην $2^{η}$ ρίψη.

   Όταν ρίχνουμε και $3^{η}$ φορά το ζάρι, τα 36 δυνατά αποτελέσματα των 2 πρώτων ρίψεων έχουν, κάθε ένα από αυτά, 6 δυνατά αποτελέσματα για την ένδειξη του ζαριού της $3^{ης}$ ρίψης. Άρα σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης έχουμε $36 \cdot 6 = 216$ συνολικά δυνατά αποτελέσματα.

ii. Ένα αποτέλεσμα με την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις του ζαριού είναι για παράδειγμα το (4,4,4). Στον παραπάνω πίνακα, που αναφέρεται στις δύο πρώτες ρίψεις, έχουμε 6 αποτελέσματα με την ίδια ένδειξη στη $1^{η}$ και $2^{η}$ ρίψη, που είναι τα ζεύγη της διαγωνίου. Κάθε ζεύγος από αυτά θα φτιάχνει τριάδες με τον ίδιο αριθμό στην $3^{η}$ θέση και αυτό πραγματοποιείται για κάθε αριθμό από το 1 έως το 6 με έναν τρόπο. Άρα τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι $6 \cdot 1 = 6$, στο σύνολο των 216 δυνατών αποτελεσμάτων.

   Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.