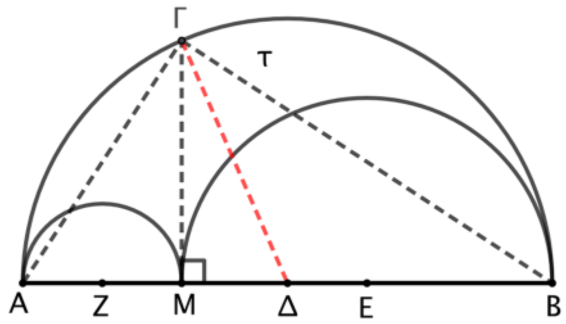
ΛΥΣΗ



α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης είναι $AZ = ZM = \alpha$, $ME = EB = \beta$ και $A\Delta = \Delta B = \alpha + \beta$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $Z\widehat{AM}$ είναι:

$$(Z\widehat{AM}) = \frac{\pi \cdot ZM^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \alpha^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $E\widehat{MB}$ είναι:

$$(E\widehat{MB}) = \frac{\pi \cdot EB^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot \beta^2}{2}$$

Το εμβαδόν του ημικυκλίου $\Delta\widehat{AB}$ είναι:

$$(\Delta\widehat{AB}) = \frac{\pi \cdot \Delta B^2 \cdot 180^o}{360^o} = \frac{\pi \cdot (\alpha + \beta)^2}{2}$$

β) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων υπολογίζεται αν αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του ημικυκλίου $\Delta\widehat{AB}$ τα εμβαδά των ημικυκλίων $Z\widehat{AM}$ και $E\widehat{MB}$, δηλαδή:

$$(\tau) = (\Delta\widehat{AB}) - (Z\widehat{AM}) - (E\widehat{MB}) = \frac{\pi \cdot (\alpha + \beta)^2}{2} - \frac{\pi \cdot \alpha^2}{2} - \frac{\pi \cdot \beta^2}{2}$$

Οπότε

$$(\tau) = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2) = \frac{\pi}{2}2\alpha\beta = \pi\alpha\beta$$

γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει ακτίνα $\rho = \dfrac{M\Gamma}{2}$ και εμβαδόν

$$E = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{M\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ. Οπότε:

$$M\Gamma^2 = AM \cdot MB = 2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta$$

Άρα, έχουμε τελικά:

$$E = \frac{\pi \cdot 4\alpha\beta}{4} = \pi\alpha\beta$$

Επομένως, $E = (\tau)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα

$$\frac{\pi \cdot M\Gamma^2}{4}$$

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν $M\Gamma = R$, αφού $M\Gamma \leq \Delta\Gamma = R$. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή θα είναι $\alpha = \beta$.