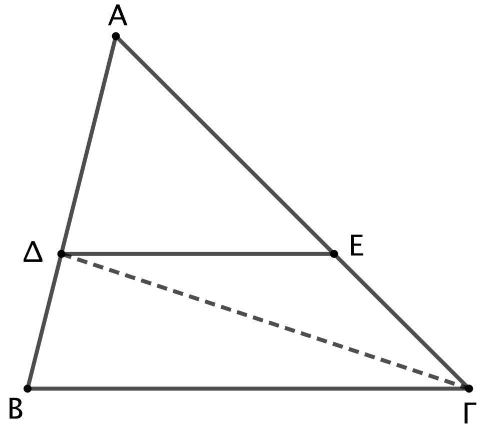
ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\hat{Β} = Α\hat{Δ}Ε$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\hat{Α}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Α} = \hat{Α}$	$Α\hat{Ε}Δ = \hat{Γ}$	$Α\hat{Δ}Ε = \hat{Β}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$λ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΔ}{2ΑΔ} = \frac{1}{2}$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = λ^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι

$$\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$$

Είναι:

$$(\Delta E \Gamma) = (\Delta A \Gamma) - (A\Delta E) \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{A\Delta}{AB}$$

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{(\Delta A\Gamma) - (A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{(\Delta A\Gamma)}{(AB\Gamma)} - \frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$$

Από (β) ερώτημα είναι $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \lambda^2$, οπότε:

$$\frac{\lambda AB \cdot A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$\lambda - \lambda^2 = \frac{2}{9}$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{3}$$