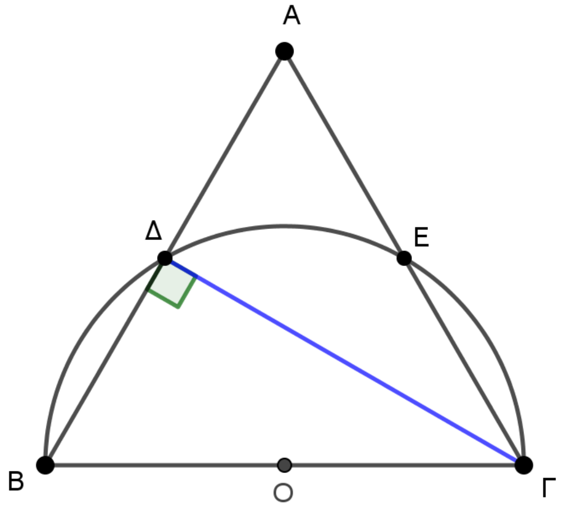
ΛΥΣΗ

α)




Από τα δεδομένα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 2α. Άρα έχουμε:

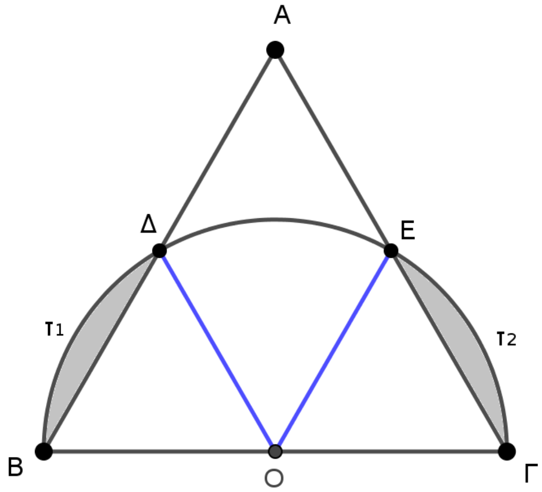
ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 2α, ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = α και $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma} = 60^0$.

Επίσης η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΒ, το ΓΔ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος. Άρα το Δ είναι μέσο της ΑΒ και όμοια το Ε, είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΔΒ = ΔΑ = ΕΑ = ΕΓ = α.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = \mathrm{B}\Gamma^2 - \mathrm{B}\Delta^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = (2\alpha)^2 - \alpha^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 3\alpha^2$, επομένως $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$.

β)



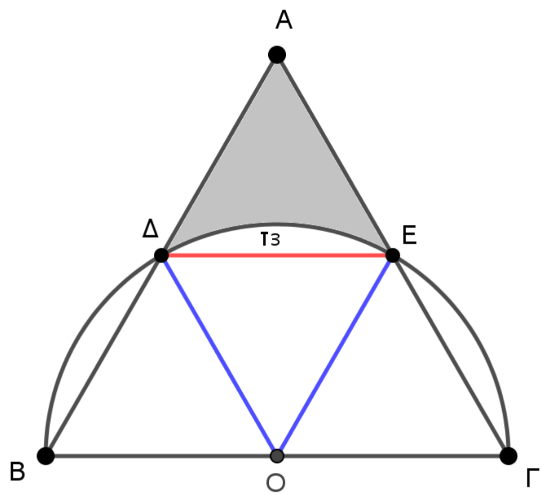
Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά $τ_1$, $τ_2$ των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα. Άρα $Ε = τ_1 + τ_2 = 2τ_1$ (1).

Όμως $τ_1 = (Ο\overset{\frown}{ΒΔ}) - (ΟΒΔ) =$

$\frac{πα^2 60}{360} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{πα^2}{6} - \frac{α^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2πα^2 - 3α^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}$.

Οπότε από την (1): $Ε = 2\frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{6}$.

γ)




Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό $τ_3$, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά $τ_1$ και $τ_2$. Δηλαδή $τ_3 = \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12}$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$Ε' = (ΑΔΕ) - τ_3 = \frac{α^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2π-3\sqrt{3})α^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}α^2 - 2πα^2 + 3\sqrt{3}α^2}{12} = \frac{6\sqrt{3}α^2 - 2πα^2}{12} =$

$\frac{2(3\sqrt{3}-π)α^2}{12} = \frac{(3\sqrt{3}-π)α^2}{6}$.