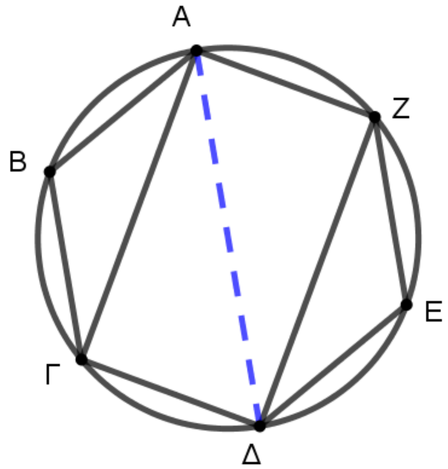
ΛΥΣΗ



α)

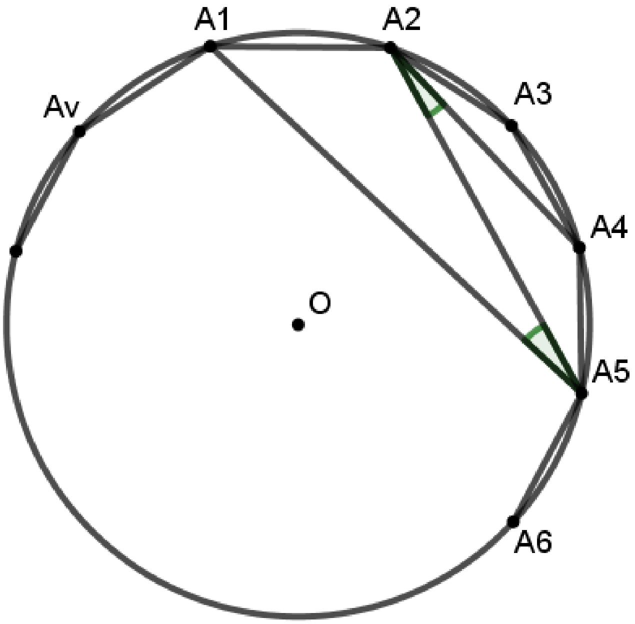
i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με $3\cdot 60^o = 180^o$, είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $Γ\hat{Α}Δ$ και $Α\hat{Δ}Ζ$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60^o το καθένα , άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες $Γ\hat{Α}Δ$ και $Α\hat{Δ}Ζ$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60^o το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που είναι ίσο με $3\cdot 60^o = 180^o$ και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180^o , άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R), άρα $ΑΖ=\lambda_6=R$. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120^o , άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R). Έτσι $ΑΓ=\lambda_3=R\sqrt{3}$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι $(ΑΓΔΖ)=ΑΖ\cdot ΑΓ=R\cdot R\sqrt{3}=R^2\sqrt{3}$.

β)



Έστω ένα κανονικό ν-γωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$, ($\nu>5$). Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5.Το κάθε ένα από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^o}{\nu}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες $A_4\widehat{A_2}A_5$ και $A_2\widehat{A_5}A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4 // A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.