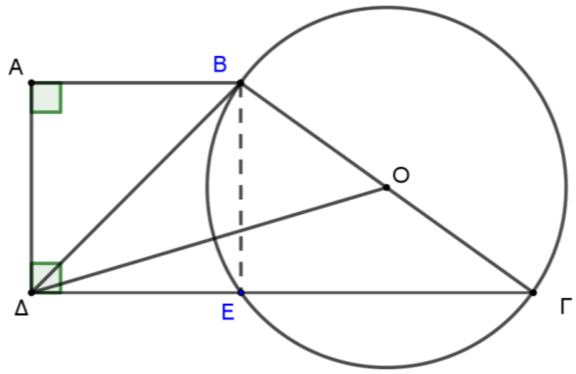
ΛΥΣΗ

α) Εφόσον το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 54 είναι:

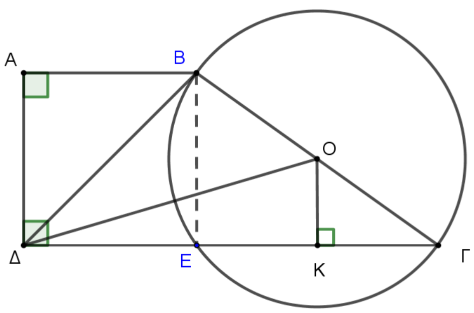
$$(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΑΒ+ΓΔ)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54=\frac{(5+13)\cdot ΑΔ}{2} \Longrightarrow 54 = 9\cdot ΑΔ \Longrightarrow ΑΔ=\frac{54}{9}=6$$

β)



Η γωνία $Β\hat{Ε}Γ=90^{o}$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο), άρα και $Β\hat{Ε}Δ=90^{o}$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχοντας σύμφωνα με την υπόθεση $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^{o}$ και $Β\hat{Ε}Δ=90^{o}$, δηλαδή τρεις γωνίες ορθές, είναι ορθογώνιο και επομένως ΒΕ=ΑΔ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου), άρα ΒΕ=6.
Ακόμη ΔΕ=ΑΒ=5, οπότε ΕΓ=ΔΓ-ΔΕ=13-5=8. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $ΒΓ^2=ΒΕ^2+ΕΓ^2$= 36+64=100. Άρα ΒΓ=10.

γ)



Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ.

Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα ΟΚ = $\frac{BE}{2}$ = 3.

Αφού η ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα θα είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

$ΔΟ^2=ΔΚ^2+ΟΚ^2 = 81+9 = 90$. Άρα $ΔΟ=3\sqrt{10}$.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΓ είναι (ΒΔΓ) = $\frac{ΔΓ.ΒΕ}{2} = \frac{13.6}{2}$ = 39. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, άρα :

$$(ΒΔΟ) = \frac{(ΒΔΓ)}{2} = \frac{39}{2} .$$