ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

AB = R = λ_6, οπότε το τόξο AB αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 6-γώνου, άρα η $A\hat{O}B = 60^0$, επομένως το μέτρο του τόξου AB ισούται με $\mu = 60^0$ (1).

ΒΓ = $R\sqrt{2} = \lambda_4$, οπότε το τόξο ΒΓ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 4-γώνου, άρα η $B\hat{O}\Gamma = 90^0$, επομένως το μέτρο του τόξου ΒΓ ισούται με $\mu = 90^0$ (2).

Για το μήκος ℓ_1 του τόξου AB έχουμε: $\ell_1 = \frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi R\cdot 60}{180} = \frac{\pi R}{3}$.

Για το μήκος ℓ_2 του τόξου ΒΓ έχουμε: $\ell_2 = \frac{\pi R\mu}{180} = \frac{\pi R\cdot 90}{180} = \frac{\pi R}{2}$.

β) Λόγω των (1), (2) για την κυρτή γωνία ΑΟΓ έχουμε: $A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 150^0$.

Το μήκος ℓ_3, του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ, θα βρεθεί αν από το μήκος του κύκλου αφαιρέσουμε τα μήκη των τόξων AB, ΒΓ, που υπολογίσαμε στο ερώτημα (α). Δηλαδή:

$\ell_3 = 2\pi R - \ell_1 - \ell_2 = 2\pi R - \frac{\pi R}{3} - \frac{\pi R}{2} = \frac{12\pi R - 2\pi R - 3\pi R}{6} = \frac{7\pi R}{6}$.

Επίσης: $(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi R^2\cdot 150}{360} = \frac{5\pi R^2}{12}$.

γ) Για το εμβαδό τ_1, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή AB έχουμε:

$(\tau_1) = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$.

Όμως $(O\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi R^2\cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Επίσης το τρίγωνο OAB, είναι ισόπλευρο, με πλευρά R. Οπότε $(OAB) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Επομένως $(\tau_1) = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$.

Για το εμβαδό τ_2, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ έχουμε:

$(\tau_2) = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma)$.

Όμως $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = \frac{\pi R^2\mu}{360} = \frac{\pi R^2\cdot 90}{360} = \frac{\pi R^2}{4}$.

Επίσης το τρίγωνο ΟΒΓ, είναι ορθογώνιο λόγω της (2), με κάθετες πλευρές OB, ΟΓ άρα

$(OB\Gamma) = \frac{1}{2}\, OB\cdot O\Gamma = \frac{1}{2}\cdot R\cdot R = \frac{R^2}{2}$.

Επομένως $(\tau_2) = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2 - 2R^2}{4} = \frac{(\pi-2)R^2}{4}$.

Έτσι: $(\tau_1) + (\tau_2) = \frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{12} + \frac{(\pi-2)R^2}{4} = \frac{(2\pi+3\pi-6-3\sqrt{3})R^2}{12} = \frac{(5\pi-6-3\sqrt{3})R^2}{12}$.