ΘΕΜΑ 4

α)

i. Το ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2\alpha$ έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2}$. Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε:

$$E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad 10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \quad ή \quad \pi\alpha^2 = 20 \quad ή \quad \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$$

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι:

$$(ΑΒΓΔ) = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 = 4 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{80}{\pi}$$

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $ΔΛ = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΛ^2 = ΑΔ^2 + ΔΛ^2 = (2\alpha)^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2$$

Από το α) i. ερώτημα είναι $\alpha^2 = \frac{20}{\pi}$, επομένως $ΑΛ^2 = 5\alpha^2 = 5 \cdot \frac{20}{\pi} = \frac{100}{\pi}$

β)

i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό E_{AB} του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$ είναι:

$$\left(\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right) = \frac{\pi \cdot ΑΛ^2}{4} = \frac{\pi \cdot \frac{100}{\pi}}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$$E = \left(\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right) - \mathrm{E_{AB}} = 25 - 10 = 15$$

ii. Από το ερώτημα (β.i) το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}$ είναι $\left(\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right) = 25$και από το α) i. ερώτημα το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{80}{\pi}$, επομένως ο λόγος του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\left(\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right)$ προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) θα είναι:

$$\frac{\left(\mathrm{A}\overset{\frown}{\mathrm{MN}}\right)}{(ΑΒΓΔ)} = \frac{25}{\frac{80}{\pi}} = \frac{25\pi}{80} = \frac{5\pi}{16}$$