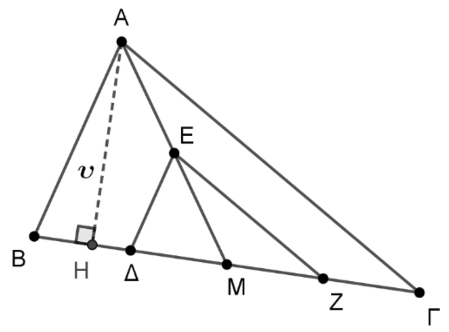
ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσο της ΑΜ, ΔΕ // ΑΒ και ΕΖ // ΑΓ.



α) Έστω ΑΗ = υ το κοινό ύψος των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ. Έχουμε

$$(\text{AMB}) = \frac{1}{2}\cdot \text{BM}\cdot\upsilon \;\text{ και }\; (\text{AMΓ}) = \frac{1}{2}\cdot \text{MΓ}\cdot\upsilon$$

Η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ΒΜ = ΜΓ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ).

β) Στο τρίγωνο ΑΜΒ το Ε είναι το μέσο της ΑΜ και ΕΔ // ΑΒ, επομένως και το Δ είναι το μέσο της ΒΜ, άρα

$$\text{MΔ} = \frac{1}{2}\cdot \text{BM} \;\text{ και }\; \text{ME} = \frac{1}{2}\cdot \text{AM}$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε

$$(\text{AMB}) = (\text{AMΓ}) = \frac{1}{2}\cdot(\text{ABΓ})$$

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία $\text{A}\hat{\text{M}}\text{B}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(\text{MEΔ})}{(\text{AMB})} = \frac{\text{ME}\cdot\text{MΔ}}{\text{AM}\cdot\text{BM}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\text{AM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{BM}}{\text{AM}\cdot\text{BM}} = \frac{1}{4}$$

άρα

$$(\text{MEΔ}) = \frac{1}{4}\cdot(\text{AMB}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\text{ABΓ}) = \frac{1}{8}\cdot(\text{ABΓ})$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι

$$\text{ΔM} = \frac{1}{2}\cdot\text{BM} = \frac{1}{2}\cdot\text{MΓ} = \text{MZ}$$

συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα (ΜΕΔ) = (ΜΕΖ) (2)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε:

$$(\text{AMB}) - (\text{MEΔ}) = (\text{AMΓ}) - (\text{MEZ}) \;\text{ ή}$$

$$(\text{ABΓΔ}) = (\text{AΓZE})$$