ΛΥΣΗ

α)

i. Επειδή ο ιμάντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες ΑΛ και ΓΜ είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛΜ, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο Α του ενός τροχού έχουμε:

$$\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + 90^{o} + \widehat{\mathrm{A}} + 90^{o} = 360^{o} \text{ ή } \mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda + \widehat{\mathrm{A}} = 180^{o}$$

δηλαδή η γωνία $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda$ και η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές.

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} = 180^{o}$$

Ανάλογα για τις γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ βρίσκουμε $\hat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^{o}$ και $\widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^{o}$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\widehat{\omega} + \widehat{\mathrm{A}} + \hat{\theta} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\varphi} + \widehat{\Gamma} = 180^{o} + 180^{o} + 180^{o} \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \hat{\theta} + \widehat{\varphi} + 180^{o} = 180^{o} + 180^{o} + 180^{o} \text{ ή}$$

$$\widehat{\omega} + \hat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^{o}$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο ΑΛΜΓ του α) ι. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα ΓΝΡΒ και ΒΣΚΑ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΝΡ = α, ΛΜ = β και ΚΣ = γ. Αν συμβολίσουμε με $\ell_{\widehat{K\Lambda}}, \ell_{\widehat{MN}}$ και $\ell_{\widehat{P\Sigma}}$ τα μήκη των μικρότερων του ημικυκλίου τόξων $\widehat{K\Lambda}, \widehat{MN}$ και $\widehat{P\Sigma}$ αντίστοιχα, τότε το μήκος L του ιμάντα είναι:

$$\mathrm{L} = \ell_{\widehat{K\Lambda}} + \Lambda\mathrm{M} + \ell_{\widehat{MN}} + \mathrm{NP} + \ell_{\widehat{P\Sigma}} + \mathrm{K}\Sigma =$$

$$= \ell_{\widehat{K\Lambda}} + \ell_{\widehat{MN}} + \ell_{\widehat{P\Sigma}} + (\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\omega}}{180^{o}} + \pi\mathrm{R}\frac{\widehat{\varphi}}{180^{o}} + \pi\mathrm{R}\frac{\hat{\theta}}{180^{o}} + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^{o}} \cdot (\widehat{\omega} + \widehat{\phi} + \hat{\theta}) + 2\tau =$$

$$= \pi\mathrm{R} \cdot \frac{1}{180^{o}} \cdot 360^{o} + 2\tau = 2\pi\mathrm{R} + 2\tau = 2(\tau + \pi\mathrm{R})$$