ΛΥΣΗ

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}$$

Αν ονομάσουμε τους ίσους λόγους κ (κ > 0), τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\kappa \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\frac{\alpha}{5}=\kappa\\ \frac{\beta}{4}=\kappa\\ \frac{\gamma}{3}=\kappa\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha=5\kappa\\ \beta=4\kappa\\ \gamma=3\kappa\end{matrix}\right\}$$

Αφού κ > 0 το μεγαλύτερο μήκος είναι εκείνο που έχει μέτρο 5κ, τότε:

$$\alpha^2=(5\kappa)^2=25\kappa^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=(4\kappa)^2+(3\kappa)^2=16\kappa^2+9\kappa^2=25\kappa^2$$

συγκρίνοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, δηλαδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\frac{\lambda}{100}$ (λ>100). Έτσι προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:

$$\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha,\ \frac{\lambda}{100}\cdot\beta \text{ και } \frac{\lambda}{100}\cdot\gamma.$$

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\beta\right)^2+\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\gamma\right)^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\beta^2+\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\gamma^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2(\beta^2+\gamma^2)=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\alpha^2=\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha\right)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, έχουμε από το (α) ερώτημα ότι:

$$\alpha=5\kappa,\ \beta=4\kappa \text{ και } \gamma=3\kappa$$

Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha<8\beta+6\gamma \Leftrightarrow 10\cdot5\kappa<8\cdot4\kappa+6\cdot3\kappa$$

$$\Leftrightarrow 50\kappa < 32\kappa + 18\kappa$$

$$\Leftrightarrow 50\kappa < 50\kappa \ , \quad \text{άτοπο}$$

επομένως δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.