

ΛΥΣΗ

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \text{ επομένως } ΑΓ = 2.$$

β)

i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ είναι $ΑΗ = ΑΔ + ΔΗ = \sqrt{2} + 1$, επομένως έχουμε:

$$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

ii. Είναι $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = \sqrt{2} - 1$. Τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$$ΖΓ^2 = ΖΕ^2 + ΕΓ^2 = 1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Από το β ερώτημα προκύπτει ότι

$$ΑΖ = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \text{ και } ΖΓ = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Στο τρίγωνο ΑΖΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2ΑΖ \cdot ΖΓ \cdot \text{συν}\omega \text{ ή}$$

$$2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \cdot \text{συν}\omega \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} \cdot \text{συν}\omega = 4 \text{ ή}$$

$$2 \cdot \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} \cdot \text{συν}\omega = 4 \text{ ή}$$

$$\text{συν}\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \hat{\omega} = 45^\circ.$$