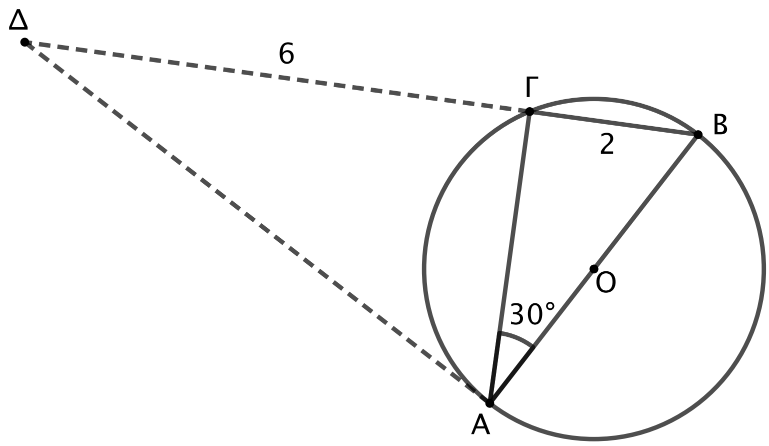
ΛΥΣΗ



α)

i. Η γωνία $B\hat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\hat{A}\Gamma = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή

$$B\Gamma = \frac{AB}{2} \quad ή \quad 2 = \frac{2R}{2} \quad ή \quad R = 2$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = 4^2 - 2^2$$

$$A\Gamma^2 = 16 - 4$$

$$A\Gamma^2 = 12$$

$$A\Gamma = \sqrt{12}$$

β) Η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή ως παραπληρωματική της ορθής γωνίας $B\hat{\Gamma}A$. Αρχικά, υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΔ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$$

$$A\Delta^2 = \sqrt{12}^2 + 6^2$$

$$A\Delta^2 = 12 + 36$$

$$A\Delta^2 = 48$$

$$A\Delta = \sqrt{48}$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ με μήκη πλευρών $AB = 4$, $\Delta B = 8$, $A\Delta = \sqrt{48}$. Έχουμε:

$\Delta B^2 = 8^2 = 64$

$AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + \sqrt{48}^2 = 16 + 48 = 64$

Αφού είναι $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$, συμπεραίνουμε ότι $B\widehat{A}\Delta = 90^o$. Επομένως, το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.