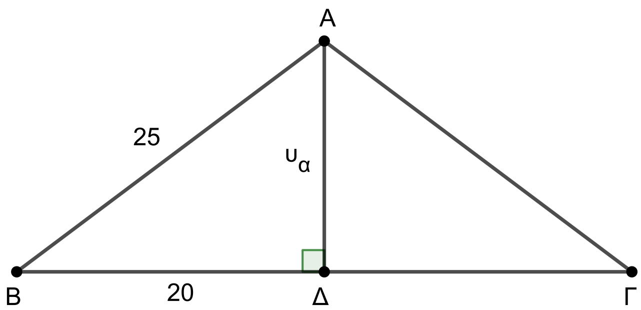
ΛΥΣΗ

α) i) Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του τριγώνου $AB\Gamma$ με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών του.

Είναι $\alpha^2 = 40^2 = 1600$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 25^2 + 25^2 = 1250$, άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{A} > 90°$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι αμβλυγώνιο.

ii) Το ύψος $\upsilon_\alpha = A\Delta$ από την κορυφή A του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος, οπότε $B\Delta = \frac{\alpha}{2} = \frac{40}{2} = 20$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ ($\hat{\Delta} = 90°$), έχουμε $\upsilon_\alpha{}^2 = \gamma^2 - B\Delta^2$ ή $\upsilon_\alpha{}^2 = 25^2 - 20^2$ ή $\upsilon_\alpha{}^2 = 225$ ή $\upsilon_\alpha = 15$.

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

Επίσης $E = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\upsilon_\beta = \frac{2E}{\beta} = \frac{600}{25} = 24$ και $E = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ ή $\upsilon_\gamma = \frac{2E}{\gamma} = \frac{600}{25} = 24$.

iii) Είναι $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$ και $\upsilon_\alpha = 15$.

Είναι $\upsilon_\beta{}^2 < \upsilon_\gamma{}^2 + \upsilon_\alpha{}^2$ ή $24^2 < 24^2 + 15^2$ ή $0 < 15^2$ που ισχύει.

Άρα το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι οξυγώνιο.

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου$AB\Gamma$ με $\beta = \gamma$ και υ_α, υ_β, υ_γ τα αντίστοιχα ύψη. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο, η αμβλεία γωνία θα είναι η $\hat{A}$. Τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > 2\beta^2$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{2}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ (1).

Είναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$, άρα $\frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$ και επειδή $\beta = \gamma$ προκύπτει $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha}$ άρα η από την (1) έχουμε $\frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} > 1$ ή $\upsilon_\beta > \upsilon_\alpha$ άρα $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma > \upsilon_\alpha$. Επομένως $\upsilon_\beta{}^2 < \upsilon_\gamma{}^2 + \upsilon_\alpha{}^2$ ή $0 < \upsilon_\alpha{}^2$ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.