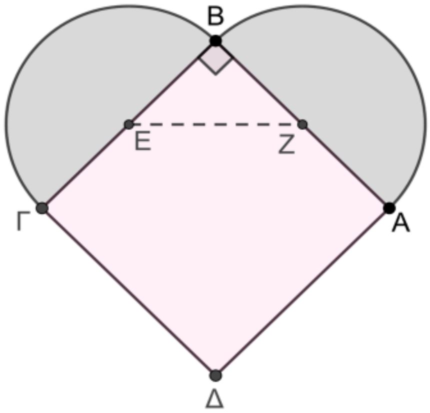
ΛΥΣΗ



α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή

ρ = $\frac{2\alpha}{2} = \alpha$. Το μήκος τόξου μ° θα είναι $\frac{\pi\rho\mu^o}{180^o}$, δηλαδή $\frac{\pi\alpha 180^o}{180^o} = \pi\alpha$.

β)

i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με πα + πα + 2α + 2α = 2πα + 4α. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε 2πα + 4α = 2π + 4 ή (2π + 4)α = 2π + 4, άρα α = 1.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ ($\widehat{B} = 90^o$) έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2 = BE^2 + BZ^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$ ή $EZ = \alpha\sqrt{2}$. Για α = 1 έχουμε $EZ = \sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι (τ) = $\pi\rho^2 = \pi\alpha^2$.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν $(AB)^2 = (2\alpha)^2 = 4\alpha^2$.

Ο ζητούμενος λόγος $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{4}$.

Επειδή π < 4 το κλάσμα $\frac{\pi}{4}$ θα είναι μικρότερο της μονάδας, το ίδιο και ο ζητούμενος λόγος.

Εναλλακτική λύση γ).

Το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων θα είναι ίσο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, διότι τα ημικύκλια έχουν ακτίνα α και ο εγγεγραμμένος στο τετράγωνο κύκλος έχει και αυτός ακτίνα α (η διάμετρος ισούται με 2α). Επειδή ο κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο τετράγωνο (σχήμα) το εμβαδόν του είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου, οπότε το κλάσμα

$$\frac{(\tau)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} < 1$$