ΛΥΣΗ

α) Αφού το ορθογώνιο Α’Β’Γ’Δ’ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, θα είναι $(ΑΒΓΔ) = 2(Α'Β'Γ'Δ')$ ή

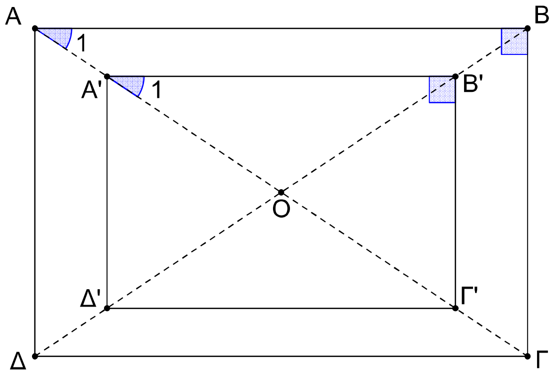
$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = 2.$$

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α’Β’Γ’Δ’, τότε

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')} = λ^2.$$

Άρα $λ^2 = 2$ ή $λ = \sqrt{2}$.

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουν $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}'_1$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, Α’Β’ που τέμνονται από την ΑΓ και $\widehat{Β} = \widehat{Β'} = 90^o$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $λ = \sqrt{2}$, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$.

Επομένως $\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$.

Όμως $ΑΓ = 40$, άρα $\frac{40}{Α'Γ'} = \sqrt{2}$ ή $Α'Γ' = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου Α’Β’Γ’Δ’ έχουν το ίδιο μήκος και διχοτομούνται. Επομένως

$$ΟΑ' = ΟΒ' = ΟΓ' = ΟΔ' = \frac{Α'Γ'}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Είναι $A'\widehat{O}B' = \Gamma'\widehat{O}\Delta' = 120^o$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Β' και ΟΓ'Δ' ισχύει

$$(OA'B') = \frac{1}{2} OA' \cdot OB' \cdot ημ120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(O\Gamma'\Delta') = \frac{1}{2} O\Gamma' \cdot O\Delta' \cdot ημ120^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Είναι $A'\widehat{O}\Delta' = B'\widehat{O}\Gamma' = 60^o$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $A'\widehat{O}B' = 120^o$. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ'Δ' και ΟΒ'Γ' ισχύει

$$(OA'\Delta') = \frac{1}{2} OA' \cdot O\Delta' \cdot ημ60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$$

και

$$(OB'\Gamma') = \frac{1}{2} OB' \cdot O\Gamma' \cdot ημ60^o = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(A'B'\Gamma'\Delta') = (OA'B') + (O\Gamma'\Delta') + (OA'\Delta') + (OB'\Gamma') = 4 \cdot 50\sqrt{3} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

<u>2η λύση για το ερώτημα γ)ii.</u>

Το τρίγωνο ΟΑ'Δ' είναι ισοσκελές, αφού $OA' = O\Delta'$ ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' και $A'\widehat{O}\Delta' = 60^o$. Άρα $O\widehat{A'}\Delta' = 60^o$. Όμως η γωνία $B'\widehat{A'}\Delta'$ είναι ορθή, επομένως $O\widehat{A'}B' = 90^o - 60^o = 30^o$.

Η γωνία $O\widehat{A'}B'$ του ορθογωνίου τριγώνου Α'Β'Γ' ισούται με 30^o, οπότε η απέναντι πλευρά Β'Γ' είναι το μισό της υποτείνουσας Α'Γ', δηλαδή $B'\Gamma' = \frac{A'\Gamma'}{2} = \frac{A'\Gamma'}{2} = 10\sqrt{2}$.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο Α'Β'Γ' έχουμε ότι

$$A'B'^2 = A'\Gamma'^2 - B'\Gamma'^2.$$

Όμως $A'\Gamma' = 20\sqrt{2}$ και $B'\Gamma' = 10\sqrt{2}$, οπότε

$$A'B'^2 = (20\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{2})^2 \text{ ή } A'B'^2 = 600 \text{ ή } A'B' = 10\sqrt{6}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(A'B'\Gamma'\Delta') = A'B' \cdot B'\Gamma' = 10\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{2} = 200\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$