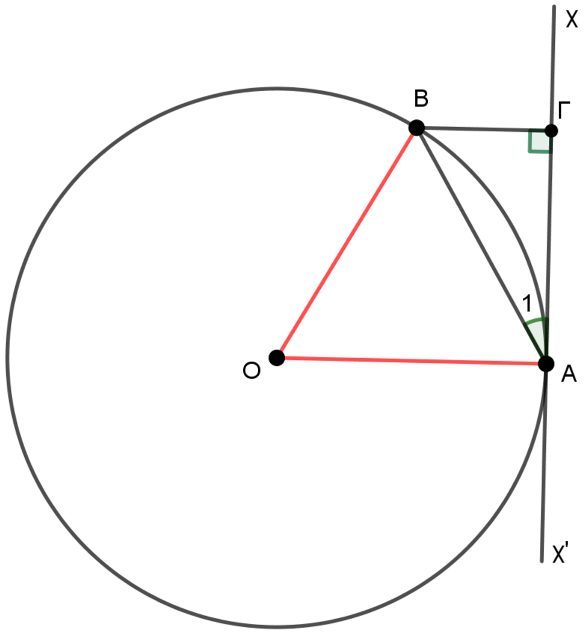
ΛΥΣΗ

α)



Φέρνουμε τις ακτίνες ΟΑ, ΟΒ.

Από τα δεδομένα, η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού 6-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε το τόξο ΑΒ θα ισούται με $\frac{360^0}{6} = 60^0$. Άρα και η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ θα ισούται με 60^0 επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ θα είναι ισόπλευρο πλευράς R. Δηλαδή ΑΒ = R = ΟΑ = ΟΒ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60^0.

Η ΟΑ ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη x’x, επομένως η γωνία ΟΑΓ είναι ορθή.

Άρα η γωνία $Α_1$ θα ισούται με 30^0, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΓ = $\frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = R^2 – (\frac{R}{2})^2$ ή $ΑΓ^2 = R^2 – \frac{R^2}{4}$ ή $ΑΓ^2 = \frac{3R^2}{4}$, οπότε ΑΓ = $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

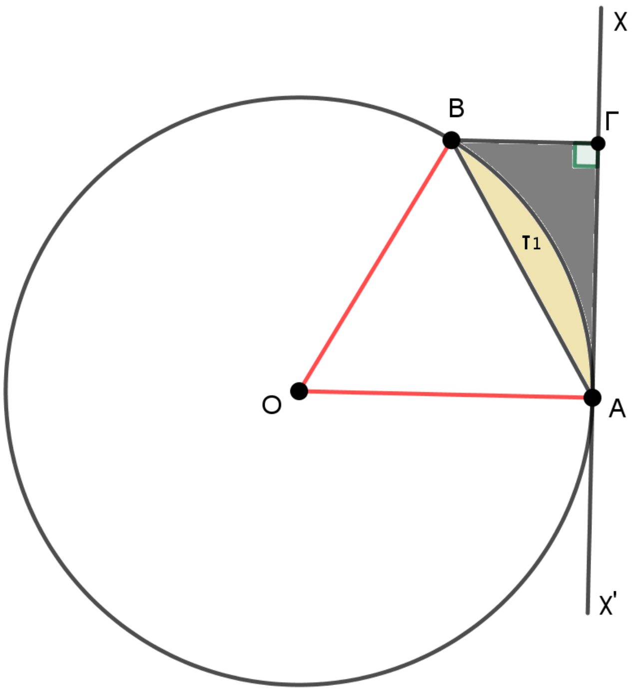
β) Λόγω του ερωτήματος (α), οι ΟΑ, ΒΓ ως κάθετες στην x’x, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τραπέζιο με βάσεις ΟΑ, ΒΓ και ύψος ΑΓ.

Οπότε (ΟΑΓΒ) = $\frac{ΟΑ+ΒΓ}{2} \cdot ΑΓ = \frac{R+\frac{R}{2}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό θα βρεθεί αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος $τ_1$. Δηλαδή Ε = (ΑΒΓ) – ($τ_1$)(1).

Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε:

(ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ ·ΒΓ·ΑΓ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$.



$(\tau_1) = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB) = \frac{\pi R^2 \mu}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^0}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12}$.

Έτσι η (1) δίνει: Ε = $\frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{2\pi R^2 - 3\sqrt{3}R^2}{12} = \frac{3\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2 + 6\sqrt{3}R^2}{24} = \frac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24} = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.

Εναλλακτικά: Το ζητούμενο εμβαδό είναι: Ε = (ΟΑΓΒ) – ($O\overset{\frown}{AB}$).

Λόγω του ερωτήματος (β) το (ΟΑΓΒ) = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

Επίσης: ($O\overset{\frown}{AB}$) = $\frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 60^0}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Έτσι Ε = $\frac{3\sqrt{3}R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{9\sqrt{3}R^2 - 4\pi R^2}{24} = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.