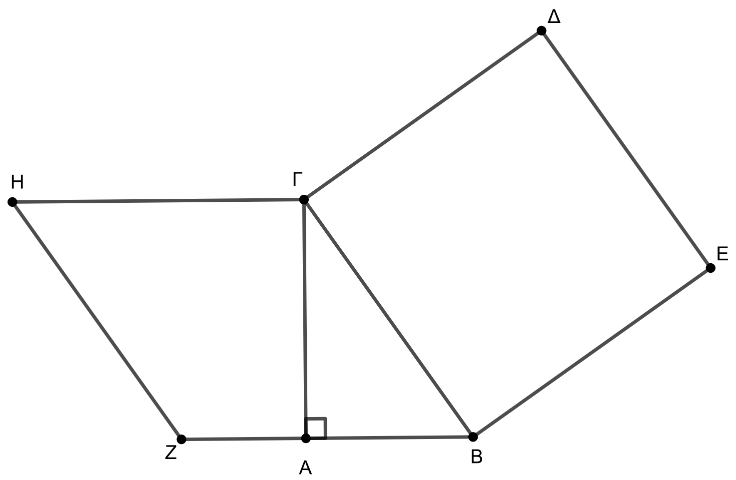
ΛΥΣΗ

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^o$ και ΒΓΔΕ το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Οι παράλληλες από το Γ στη ΒΖ και από το Ζ στη ΒΓ τέμνονται στο Η.



α) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΖ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΗΖ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με 4·ΒΓ. Επίσης το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με 4·ΒΓ. Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.

β) Για το εμβαδό του τετραγώνου έχουμε ότι (ΒΓΔΕ) = $ΒΓ^2$. Ενώ, για το εμβαδό του ρόμβου, αφού ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε: (ΒΓΗΖ) = ΒΖ·ΓΑ με ΓΑ η απόσταση των παραλλήλων πλευρών του ΒΖ και ΓΗ. Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΒΓ και για το εμβαδό του ρόμβου, το ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΑΓ. Το τμήμα ΑΓ είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και το τμήμα ΒΓ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη της υποτείνουσας, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά. Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.