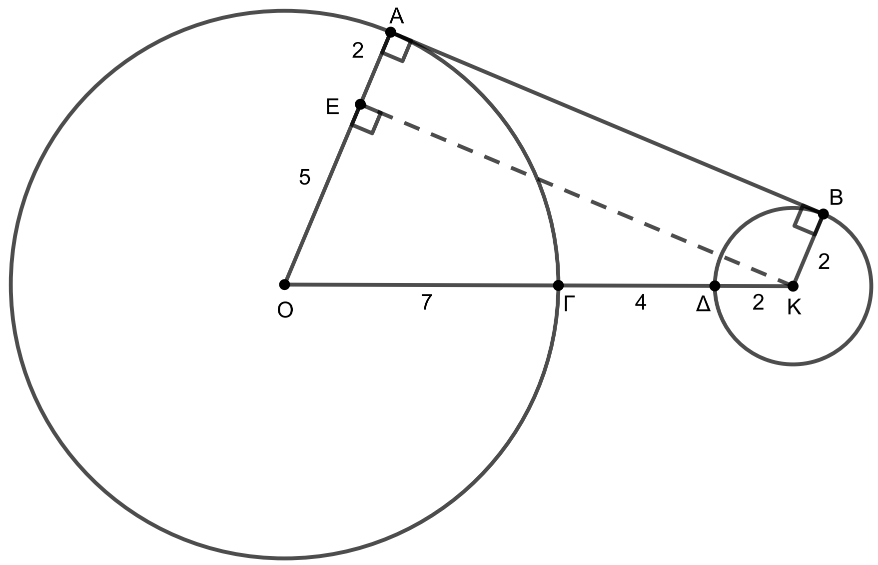
ΛΥΣΗ

α)



i. Οι ακτίνες ΟΑ και ΚΒ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ στα σημεία επαφής Α και Β. Το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο ΑΒ και αφού ΑΒ$\perp$ΟΑ, θα είναι και ΚΕ$\perp$ΟΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΚΕ έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως ΑΕ=ΚΒ=2 και ΟΕ=ΟΑ-ΕΑ=7-2=5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ η υποτείνουσά του ΟΚ είναι ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ=7+4+2=13. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΚΕ^2=ΟΚ^2-ΟΕ^2$ ή $ΚΕ^2=13^2-5^2$ ή $ΚΕ^2=169-25$ ή $ΚΕ^2=144$, άρα ΚΕ=12. Άρα ΑΒ = ΚΕ =12.

ii. Στο τετράπλευρο ΑΒΚΟ είναι ΟΑ$\perp$ΑΒ και ΚΒ$\perp$ΑΒ, άρα ΟΑ//ΚΒ. Επίσης ΟΑ=7≠2=ΚΒ, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε δεν είναι παραλληλόγραμμο. Άρα το ΑΒΚΟ είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η ΚΒ, η μεγάλη βάση του η ΟΑ και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΒ. Οπότε (ΑΒΚΟ) = $\frac{ΚΒ+ΟΑ}{2} \cdot ΑΒ = \frac{2+7}{2} \cdot 12 = 54$ τ.μ.

β) Το ΑΒΚΕ είναι ορθογώνιο, άρα (ΑΒΚΕ) = ΑΒ·ΚΒ. Επειδή (ΑΒΚΕ) = $4\sqrt{14}$, έχουμε: $4\sqrt{14}$ = ΑΒ·2 άρα ΑΒ = $2\sqrt{14}$. Από το α) ερώτημα ΑΒ=ΚΕ, οπότε ΚΕ=$2\sqrt{14}$ και από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΟΚΕ είναι: $ΟΚ^2 = ΟΕ^2+ΚΕ^2$ ή $ΟΚ^2=5^2+(2\sqrt{14})^2$, ή $ΟΚ^2 = 25+56$, ή $ΟΚ^2=81$, άρα ΟΚ=9. Για το τμήμα ΟΚ ισχύει ότι ΟΚ=ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ, ή 9=7+ΓΔ+2, δηλαδή 9=9+ΓΔ, οπότε ΓΔ=0. Δηλαδή η διάκεντρος ΟΚ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.