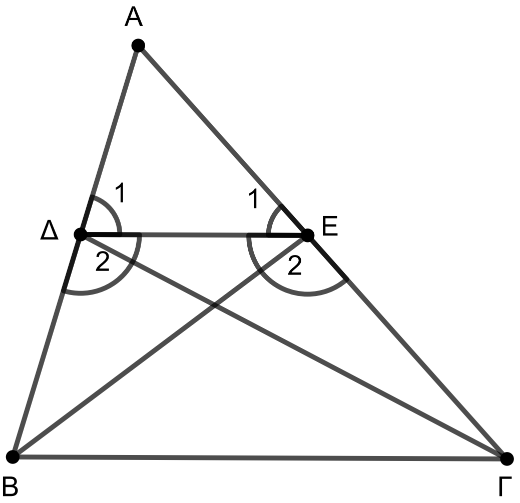
ΛΥΣΗ

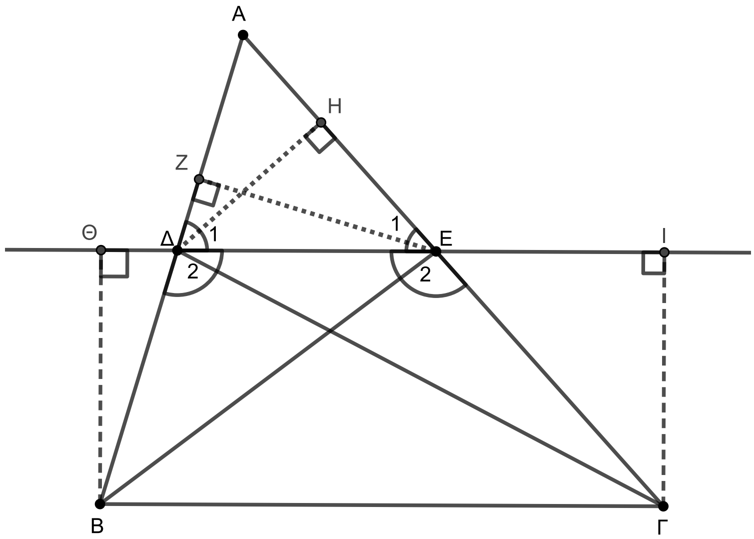
α)



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες τους $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές όπως και τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες $\hat{\mathrm{E}}_1$ και $\hat{\mathrm{E}}_2$. Άρα οι λόγοι των εμβαδών τους θα είναι ίσοι με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{\Delta E}}{\mathrm{\Delta B} \cdot \mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$ και $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})} = \frac{\mathrm{AE} \cdot \mathrm{\Delta E}}{\mathrm{E\Gamma} \cdot \mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$. Επομένως από το α) ερώτημα θα ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})} = \frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}$, άρα (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

Εναλλακτική λύση:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Ε, το τμήμα ΕΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των πλευρών που αντιστοιχεί αυτό το ύψος. Δηλαδή $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$. Ομοίως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Δ, το τμήμα ΔΗ, επομένως $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΔΕΓ έχουν κοινή πλευρά τη ΔΕ και οι απέναντι κορυφές τους Β και Γ αντίστοιχα βρίσκονται στη ΒΓ, που είναι παράλληλη στη ΔΕ. Δηλαδή, έχουν κοινή βάση και ίσα ύψη, τα ΒΘ και ΓΙ αντίστοιχα, που είναι η απόσταση των παραλλήλων ΒΓ και ΔΕ. Άρα είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).