ΛΥΣΗ

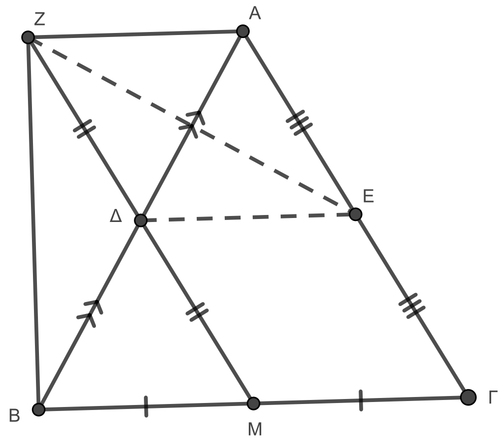
α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουν:

ΔΖ = ΔΜ, από υπόθεση

ΑΔ = ΔΒ, διότι Δ είναι μέσο του ΑΒ

$Α\widehat{Δ}Ζ = Β\widehat{Δ}Μ$, ως κατακορυφήν

Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες άρα είναι ίσα.



β) Το ΔΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα η ΔΜ // ΑΓ οπότε και ΖΜ // ΑΓ και ΔΜ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Όμως το Δ είναι μέσο του ΖΜ άρα ΔΜ = $\frac{ΖΜ}{2}$. Συνεπώς ΖΜ = ΑΓ.

Τελικά οι απέναντι πλευρές ΖΜ και ΑΓ του τετραπλεύρου ΖΑΓΜ είναι παράλληλες και ίσες οπότε το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο ισχύει ότι ΖΑ // ΜΓ δηλαδή

ΖΑ // ΒΓ και ΖΑ = ΜΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΔΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου οπότε:

ΔΕ //ΒΓ και ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$. Όμως το Μ είναι μέσο του ΒΓ άρα ΔΕ = ΜΓ .

Οπότε ΖΑ // ΔΕ και ΖΑ = ΔΕ, δηλαδή το τετράπλευρο ΖΑΕΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΖΑ και ΔΕ ίσες παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον ισχύει ότι: ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε

ΒΓ = ΑΓ. Συνεπώς ΔΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Όμως Ε μέσο του ΑΓ άρα ΑΕ = $\frac{ΑΓ}{2}$. Οπότε ΔΕ = ΑΕ

Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΕΔΖ έχει τις διαδοχικές του πλευρές ΔΕ και ΑΕ ίσες οπότε είναι ρόμβος.

Τα τμήματα ΖΕ, ΑΔ είναι διαγώνιοι του ρόμβου, οπότε τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.

δ) Είναι ΖΔ = ΔΜ = $\frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$.

Στο τρίγωνο ΖΑΒ η ΖΔ είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς ΑΒ στην οποία αντιστοιχεί. Άρα το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ, οπότε η ΖΒ είναι κάθετη στη ΖΑ.