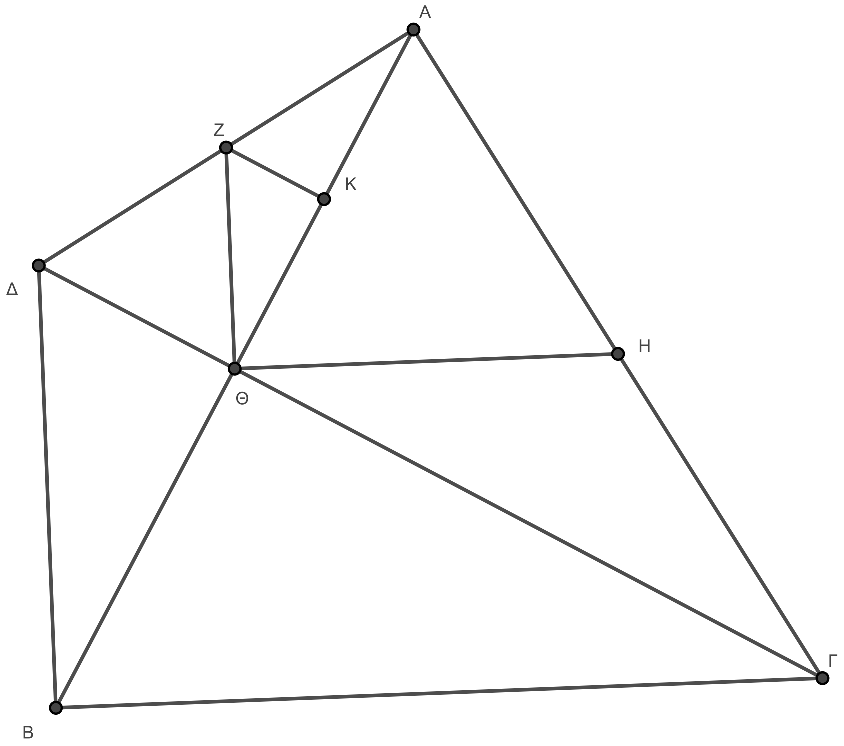
ΛΥΣΗ



α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε ΓΑ = ΓΒ, δηλαδή το Γ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επίσης το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές, οπότε ΔΑ = ΔΒ, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Επειδή τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τα άκρα Α, Β του τμήματος ΑΒ θα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, οπότε η ΓΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

β) Το τμήμα ΔΘ ανήκει στη μεσοκάθετο ΓΔ του ΑΒ οπότε θα είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΒ, άρα θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$, και θα ισχύει $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Theta = \Theta\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 60^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΔ η ΘΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΔ, άρα $\Theta\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2} = \mathrm{ZA}$. Επομένως το τρίγωνο ΖΘΔ είναι ισοσκελές και αφού $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Theta = 60^o$, το τρίγωνο ΖΘΔ είναι ισόπλευρο, άρα $\mathrm{Z}\widehat{\Theta}\Delta = 60^o$ (1).

Ομοίως, το τμήμα ΘΓ θα είναι ύψος και διάμεσος στην πλευρά ΑΒ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΒ, άρα θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma} = 60^0$, οπότε $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Theta = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΘΓ η ΘΗ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Theta\mathrm{H} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{2} = \mathrm{H}\Gamma$. Επομένως το τρίγωνο ΘΗΓ είναι ισοσκελές και θα ισχύει ότι $\mathrm{H}\widehat{\Theta}\Gamma = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Theta$, άρα

$H\widehat{\Theta}\Gamma = 30^o$ (2).

Είναι $\Delta\widehat{\Theta}\Gamma = 180^o$ ή $Z\widehat{\Theta}\Delta + Z\widehat{\Theta}H + H\widehat{\Theta}\Gamma = 180^o$ και λόγω των σχέσεων (1) και (2) θα έχουμε

$60^o + Z\widehat{\Theta}H + 30^o = 180^o$, άρα $Z\widehat{\Theta}H = 90^o$.

γ) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΔ ισχύει ότι:

$A\widehat{\Delta}\Theta + \Delta\widehat{A}\Theta = 90^o$ με $A\widehat{\Delta}\Theta = 60^0$, οπότε $60^o + \Delta\widehat{A}\Theta = 90^o$ ή $\Delta\widehat{A}\Theta = 30^o$.

Τότε για την απέναντι πλευρά της γωνίας $\Delta\widehat{A}\Theta$ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΚ θα ισχύει ότι:

$ZK = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Delta}{2}}{2} = \frac{A\Delta}{4}$.