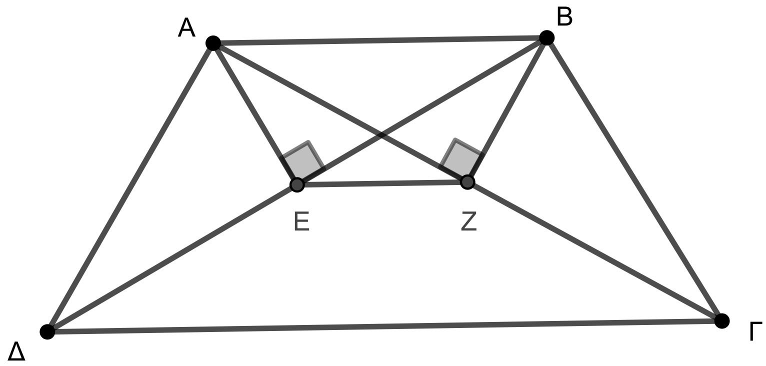
ΛΥΣΗ



α) Επειδή ΑΔ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΑΕ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ε είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, επειδή ΑΒ = ΒΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος ΒΖ είναι και διάμεσος, δηλαδή το Ζ είναι μέσο της ΑΓ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ είναι ορθογώνια, αφού από υπόθεση είναι ΑΕ ⊥ ΒΔ και ΒΖ ⊥ ΑΓ, και έχουν:

- ΑΒ κοινή πλευρά
- ΑΖ = ΑΕ, ως μισά των ίσων διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ του ισοσκελούς τραπεζίου.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΖ είναι ίσα γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Οπότε έχουν και τις άλλες κάθετες πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΒΖ (1).

γ) Τα σημεία Ε και Ζ είναι μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ, άρα θα ισχύει ότι:
ΕΖ // ΑΒ // ΓΔ.

Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Ζ = 90^0 + Β\hat{Ε}Ζ$ και $Β\hat{Ζ}Ε = 90^0 + Α\hat{Ζ}Ε$ θα είναι $Α\hat{Ε}Ζ + Β\hat{Ζ}Ε > 180^0$. Επομένως, οι ΑΕ και ΒΖ δεν είναι παράλληλες. Άρα, το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο δυο πλευρές του παράλληλες.

Επειδή είναι ΑΕ = ΒΖ (λόγω της (1)) προκύπτει ότι το τραπέζιο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΔ, ισχύει ότι:
$Α\widehat{Δ}Β = Α\widehat{Β}Δ$ (2)

Ισχύει επίσης ότι $Α\widehat{Β}Δ = Β\widehat{Δ}Γ$ (3) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ.

Άρα από τις (2), (3) προκύπτει ότι $Α\widehat{Δ}Β = Β\widehat{Δ}Γ$, δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Δ}$.