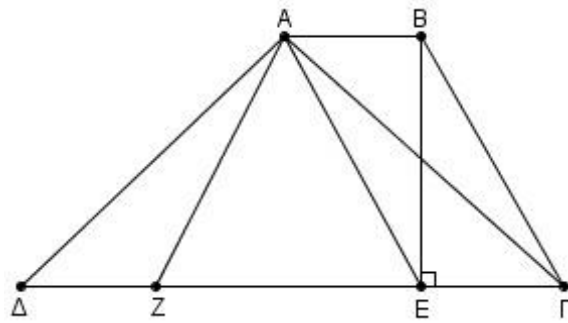


ΛΥΣΗ



α) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:

$$\widehat{ΕΒΓ} + \widehat{Γ} = 90^\circ \text{ ή } \widehat{ΕΒΓ} + 60^\circ = 90^\circ \text{ ή } \widehat{ΕΒΓ} = 30^\circ$$

Οπότε, στο τρίγωνο ΒΕΓ η απέναντι πλευρά από τη γωνία των 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $ΕΓ = \frac{ΒΓ}{2} = ΑΒ$ (1).

Επειδή είναι $ΑΒ // ΔΓ$ και το σημείο Ε της ΔΓ είναι τέτοιο ώστε $ΕΓ = ΑΒ$ τότε θα είναι $ΑΒ // ΕΓ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $ΔΓ = ΔΖ + ΖΕ + ΕΓ$ (2). Επίσης ισχύουν:

- $ΔΓ = 4 ΑΒ$ από υπόθεση
- $ΔΖ = ΑΒ$ από υπόθεση
- $ΕΓ = ΑΒ$ από σχέση (1)

Άρα η σχέση (2) γίνεται $4ΑΒ = ΑΒ + ΖΕ + ΑΒ$ ή $ΖΕ = 2ΑΒ$ και επειδή $2ΑΒ = ΒΓ$ από υπόθεση, είναι $ΖΕ = ΒΓ$.

Επειδή είναι $ΒΓ = ΑΕ$, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΕΓΒ, άρα $ΖΕ = ΑΕ$. Οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\widehat{ΑΕΖ} = \widehat{Γ} = 60^\circ$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΓΔ, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΕ έχει μια γωνία 60° , άρα είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ έχουν:

- $ΔΖ = ΓΕ$, αφού είναι $ΔΖ = ΑΒ$ (υπόθεση) και $ΕΓ = ΑΒ$ (σχέση (1))
- $ΑΖ = ΑΕ$, διότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο (από β) ερώτημα)
- $\widehat{ΑΖΔ} = \widehat{ΑΕΓ} = 120^\circ$, ως παραπληρωματικές των γωνιών $\widehat{ΑΖΕ} = \widehat{ΑΕΖ} = 60^\circ$ του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΑΕ.

Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες τους ίσες άρα είναι ίσα.