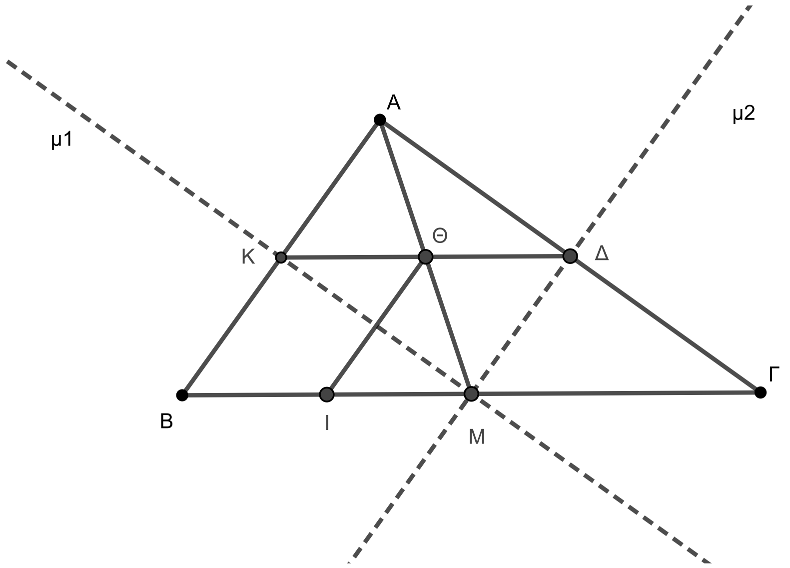
ΛΥΣΗ



α) i. Το σημείο Μ ανήκει στις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, οπότε ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Γ, δηλαδή είναι ΜΑ = ΜΒ (1) και ΜΑ = ΜΓ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΜΒ = ΜΓ, άρα το Μ είναι μέσο της ΒΓ και ισχύει

ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος του ΑΜ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\widehat{Α}$ = 90°.

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ έχει τρείς γωνίες ορθές, την γωνία $Κ\widehat{Α}Λ$ από το i.) ερώτημα και τις γωνίες $Α\widehat{Λ}Μ$ και $Α\widehat{Κ}Μ$ λόγω των μεσοκαθέτων μ_2 και μ_1 των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Οπότε το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο.

iii. Επειδή το ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοί του ΑΜ και ΚΛ είναι ίσες και διχοτομούνται και Θ είναι το κέντρο του.

Οπότε είναι ΛΘ = $\frac{ΚΛ}{2} = \frac{ΑΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$ αφού είναι ΚΛ = ΑΜ και ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΜ, τα Κ, Θ είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΜ αντίστοιχα.

Οπότε είναι ΚΘ // ΒΜ άρα είναι ΚΘ // ΒΙ (3)

Επίσης είναι ΚΘ = $\frac{ΒΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$ αφού Μ μέσο του ΒΓ και επειδή το σημείο Ι είναι το μέσο του ΒΜ θα είναι ΒΙ = $\frac{ΒΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$. Άρα θα είναι ΚΘ = ΒΙ (4).

Οπότε, το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του, τις ΚΘ και ΒΙ, ίσες και παράλληλες (σχέσεις (3) και (4)).