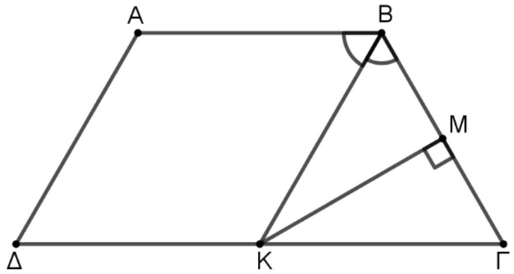
ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ. Άρα $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o$.

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $\widehat{\mathrm{B}} = 2\widehat{\Gamma}$, τότε $3\widehat{\Gamma} = 180^o$ άρα $\widehat{\Gamma} = 60^o$, οπότε $\widehat{\mathrm{B}} = 120^o$. Το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε οι γωνίες που είναι προσκείμενες σε κάθε του βάση είναι ίσες, άρα $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = 120^o$ και $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 60^o$.

β) i. Επειδή η ΒΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K} = \mathrm{K}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^o$. Στο τρίγωνο ΒΚΓ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60^o οπότε και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma = 60^o$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, επομένως ΚΒ = ΚΓ = ΒΓ.

Επειδή $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ από υπόθεση θα είναι και ΔΚ = ΚΒ = ΑΒ = ΑΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος γιατί έχει τις πλευρές του ίσες.

ii. Το τρίγωνο ΚΒΓ είναι ισόπλευρο και το ΚΜ είναι ύψος του αφού $\mathrm{KM} \perp \mathrm{B\Gamma}$, άρα θα είναι και διάμεσος της πλευράς ΒΓ, συνεπώς το Μ είναι μέσο του ΒΓ.