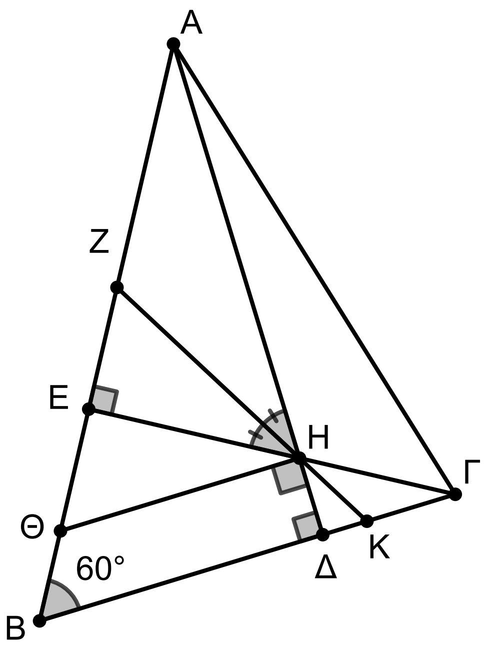
ΛΥΣΗ



α) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει ότι:

$B\widehat{A}\Delta+\widehat{B}= 90^o$ ή $B\widehat{A}\Delta+ 60^o= 90^o$ ή $B\widehat{A}\Delta= 30^o$, άρα και $E\widehat{A}H = 30^o$(1)

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τρίγωνο ΑΕΗ ισχύει ότι:

$E\widehat{H}A + E\widehat{A}H = 90^o$ ή $E\widehat{H}A + 30^o=90^o$ ή $E\widehat{H}A = 60^o$

Επειδή η ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\widehat{H}A$, είναι $E\widehat{H}Z=30^o$ (2), οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΗΖ ισχύει ότι $EZ = \frac{ZH}{2}$ άρα ΖΗ = 2ΕΖ.

β) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΘΗ ισχύει ότι:

$\Theta\widehat{A}H + A\widehat{\Theta}H= 90^o$ ή $E\widehat{A}H + A\widehat{\Theta}H= 90^o$, όμως $E\widehat{A}H = 30^o$ (σχέση 1), οπότε $30^o +A\widehat{\Theta}H= 90^o$, άρα $A\widehat{\Theta}H= 60^o$ (3).

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΕΗΘ ισχύει ότι:

$E\widehat{\Theta}H+ E\widehat{H}\Theta= 90^o$ ή $A\widehat{\Theta}H + E\widehat{H}\Theta= 90^o$, όμως $A\widehat{\Theta}H= 60^o$ (σχέση 3), οπότε $60^o+E\widehat{H}\Theta= 90^o$, άρα $E\widehat{H}\Theta= 30^o$

Όμως είναι $E\widehat{H}Z=30^o$ (σχέση 2), άρα $E\widehat{H}\Theta=E\widehat{H}Z= 30^o$, οπότε η ΗΕ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΘΗΖ και επειδή είναι και ύψος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Όμως $A\widehat{\Theta}H= 60^o$ (από σχέση 3), οπότε το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι $\Theta H\perp A\Delta$ και $BK\perp A\Delta$, οπότε ΘΗ//ΒΚ ως κάθετες στην ίδια ευθεία. Οι ΘΒ και ΗΔ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες, οπότε το ΘΗΚΒ είναι τραπέζιο.

Επίσης, $\Delta\widehat{H}K=A\widehat{H}Z=30^o$ (4) ως κατακορυφήν.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΗΔΚ ισχύει ότι:

$\Delta\widehat{H}K + H\widehat{K}\Delta = 90^o$, οπότε λόγω της σχέσης (4) θα είναι $30^o + H\widehat{K}\Delta = 90^o$ ή $H\widehat{K}\Delta = 60^o$

Επειδή $H\widehat{K}\Delta = \widehat{B} = 60^o$, οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση ΒΚ του τραπεζίου είναι ίσες, οπότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.