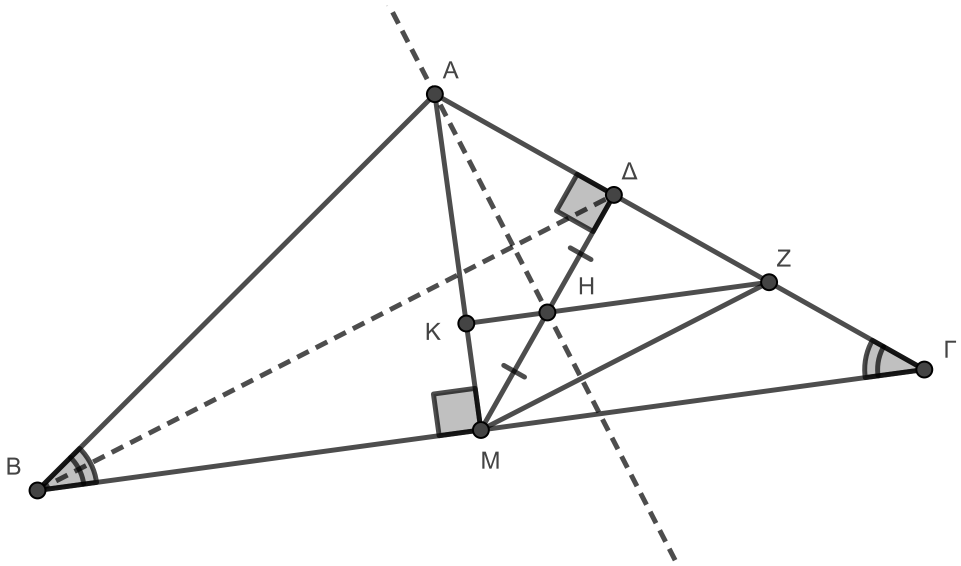
ΛΥΣΗ



α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΜ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Άρα ΓΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο ΜΔΓ το Η είναι μέσο της ΜΔ και ΗΖ // ΜΓ, άρα το Ζ είναι μέσο της ΔΓ και ισχύει ότι: ΗΖ = $\frac{ΓΜ}{2}$ (2)

Από (1), (2) βρίσκουμε: ΗΖ = $\frac{ΓΜ}{2} = \frac{\frac{ΒΓ}{2}}{2} = \frac{ΒΓ}{4}$

β) Στο τρίγωνο ΒΔΓ το ΜΖ ενώνει τα μέσα Μ και Ζ των πλευρών ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα, άρα: ΜΖ // ΒΔ.

γ) Είναι ΚΖ // ΒΓ και ΒΓ $\perp$ ΑΜ, άρα ΚΖ $\perp$ ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΖ τα ΜΔ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους Η, είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το ΑΗ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή ΑΗ $\perp$ ΜΖ και επειδή ΜΖ // ΒΔ είναι και ΑΗ $\perp$ ΒΔ.