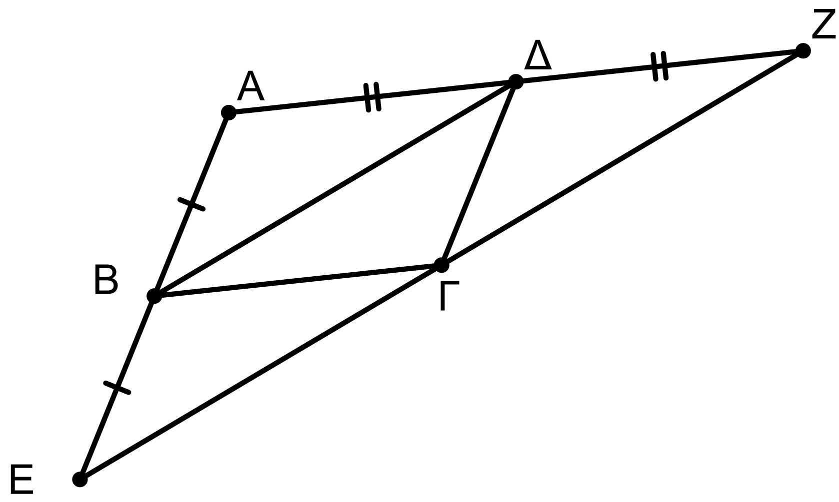
ΛΥΣΗ



α) i. Είναι ΑΒ //= ΓΔ και ΑΒ = ΒΕ οπότε ΒΕ // = ΓΔ.

Στο τετράπλευρο ΒΔΓΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

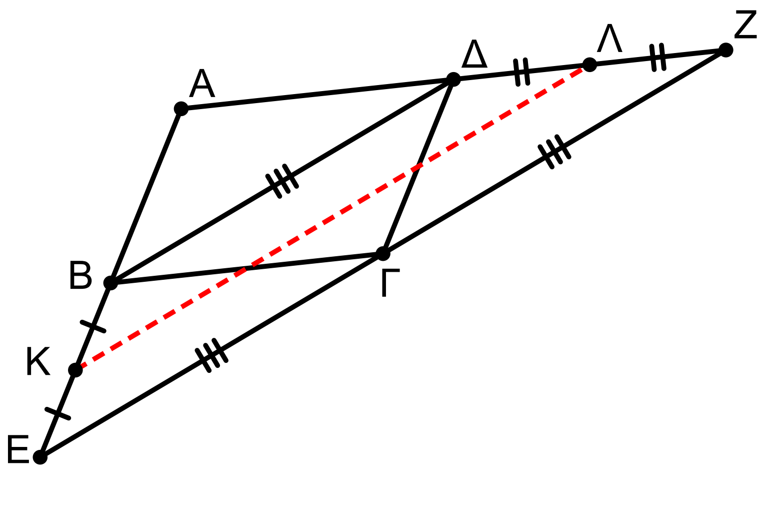
Όμοια, ΑΔ // = ΒΓ και ΑΔ = ΔΖ οπότε ΔΖ // = ΒΓ.

Επομένως το τετράπλευρο ΒΔΖΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι ΕΓ // ΒΔ (1).

Όμοια, το ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΓΖ// ΒΔ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΓ //ΓΖ, άρα τα σημεία Ε, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.



β) Επειδή ΒΔ // ΕΖ, και οι ΕΒ και ΖΔ τέμνονται στο Α, το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι τραπέζιο.

Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα ΚΛ // ΔΒ και ισχύει ότι:

$$ΚΛ = \frac{ΔΒ+ΕΖ}{2} = \frac{ΔΒ+ΕΓ+ΓΖ}{2} = \frac{ΔΒ+ΔΒ+ΔΒ}{2} = \frac{3ΔΒ}{2}$$