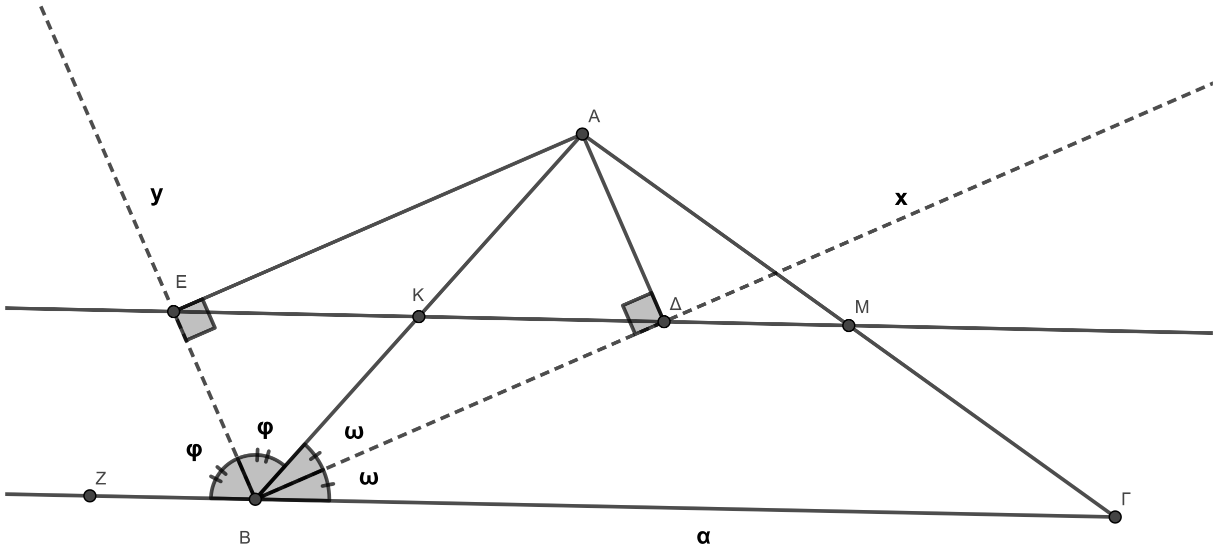
ΛΥΣΗ



α) Οι Bx και By είναι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{\mathrm{B}}$ και $\widehat{\mathrm{B}}_{\varepsilon\xi}$, θέτουμε Γ$\widehat{\mathrm{B}}$Δ=Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Α=$\widehat{\omega}$ και Α$\widehat{\mathrm{B}}$Ε=Ε$\widehat{\mathrm{B}}$Ζ= $\widehat{\varphi}$.

Τότε: Γ$\widehat{\mathrm{B}}$Δ + Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Α + Α$\widehat{\mathrm{B}}$Ε + Ε$\widehat{\mathrm{B}}$Ζ = 180^o ή $\widehat{\omega}$ + $\widehat{\omega}$ + $\widehat{\varphi}$ + $\widehat{\varphi}$ = 180^o ή 2$\widehat{\omega}$ + 2$\widehat{\varphi}$ =180^o

ή $\widehat{\omega}$ + $\widehat{\varphi}$ = 90^o ή Ε$\widehat{\mathrm{B}}$Δ = $\widehat{\omega}$ + $\widehat{\varphi}$ = 90^o

Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ έχει τρείς γωνίες ορθές άρα είναι ορθογώνιο.

β) Οι διαγώνιοι ΕΔ και ΑΒ του ορθογωνίου ΑΔΒΕ είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα:

ΑΒ = ΕΔ ή $\frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{E\Delta}}{2}$ ή ΚΒ = ΚΔ

Επομένως το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές και ισχύει ότι Κ$\widehat{\mathrm{B}}$Δ = Κ$\widehat{\Delta}$Β (1).

Ισχύει ακόμη ότι Κ$\widehat{\mathrm{B}}$Δ = Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Γ = $\widehat{\omega}$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε Κ$\widehat{\Delta}$Β = Δ$\widehat{\mathrm{B}}$Γ.

Δηλαδή οι ευθείες ΕΔ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα είναι ΕΔ // ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Κ είναι μέσο της ΑΒ και ΚΜ // ΒΓ, άρα η ΚΜ διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ.

γ) Επειδή το ΚΜ ενώνει μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, είναι:

ΚΜ // ΒΓ (3) και ΚΜ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (4)

Από την (3) και γνωρίζοντας ότι οι ΚΒ και ΜΓ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Α, προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο. Η διάμεσος του τραπεζίου, είναι ίση με: $\frac{\mathrm{KM+B\Gamma}}{2}$. Αντικαθιστώντας το ΚΜ από τη σχέση (4) έχουμε

$$\frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} + \mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\frac{3\mathrm{B\Gamma}}{2}}{2} = \frac{3\mathrm{B\Gamma}}{4} = \frac{3\alpha}{4}$$