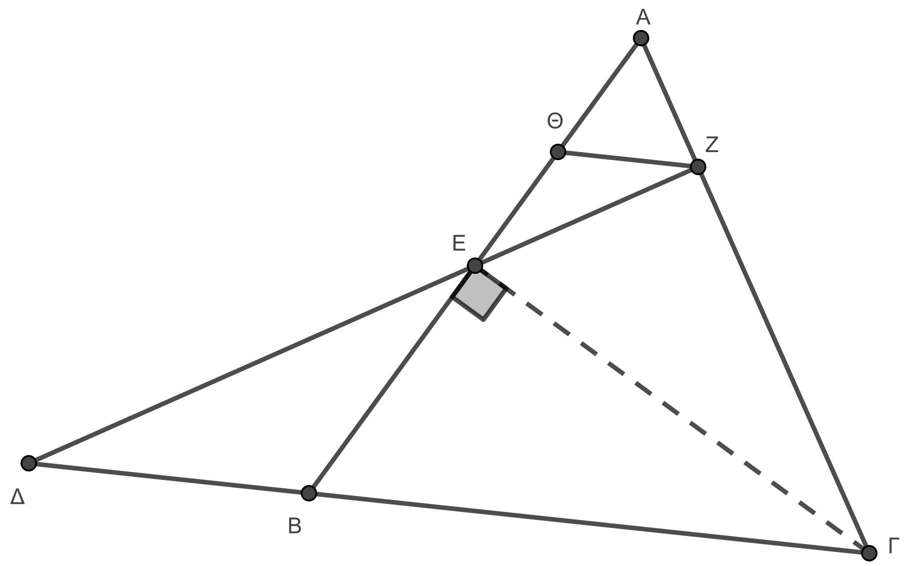
ΛΥΣΗ



α) Το ΓΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Συγκεκριμένα είναι διάμεσος της πλευράς ΑΒ, άρα ΒΕ = $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$.

Επίσης, από την υπόθεση ΒΔ = $\frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

Όμως ΑΒ = ΒΓ, καθώς το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, άρα ΒΕ = ΒΔ και επομένως το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\widehat{\text{Α}}$ = Α$\widehat{\text{Β}}$Γ = Α$\widehat{\text{Γ}}$Β = 60^o.

Είναι ακόμη Α$\widehat{\text{Θ}}$Ζ = Α$\widehat{\text{Β}}$Γ, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα Α$\widehat{\text{Θ}}$Ζ = 60^o.

Ισχύει ακόμη ότι Α$\widehat{\text{Ζ}}$Θ = Α$\widehat{\text{Γ}}$Β, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα Α$\widehat{\text{Ζ}}$Θ = 60^o.

Συνεπώς, από τα παραπάνω στο τρίγωνο ΑΘΖ ισχύει Α$\widehat{\text{Θ}}$Ζ = Α$\widehat{\text{Ζ}}$Θ = $\widehat{\text{Α}}$ = 60^o, οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Οι γωνίες Ε$\widehat{\text{Θ}}$Ζ και Α$\widehat{\text{Θ}}$Ζ είναι παραπληρωματικές άρα:

Ε$\widehat{\text{Θ}}$Ζ + Α$\widehat{\text{Θ}}$Ζ = 180^o ή Ε$\widehat{\text{Θ}}$Ζ = 180^o – Α$\widehat{\text{Θ}}$Ζ ή Ε$\widehat{\text{Θ}}$Ζ = 180^o – 60^o = 120^o.

Η γωνία Α$\widehat{\text{Β}}$Γ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΔΕ, άρα Α$\widehat{\text{Β}}$Γ = $\widehat{\Delta}$ + Δ$\widehat{\text{Ε}}$Β ή 60^o = $\widehat{\Delta}$ + Δ$\widehat{\text{Ε}}$Β.

Όμως το ΒΔΕ, όπως έχει αποδειχθεί στο α) είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, άρα οι γωνίες της βάσης, $\widehat{\Delta}$ και Δ$\widehat{\text{Ε}}$Β είναι ίσες. Επομένως 60^o = 2Δ$\widehat{\text{Ε}}$Β ή Δ$\widehat{\text{Ε}}$Β = 30^o.

Οπότε και $\Theta\hat{E}Z = 30^o$ ως κατακορυφήν της $\Delta\hat{E}B$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘΕΖ, βρίσκουμε:

$\Theta\hat{E}Z + E\hat{\Theta}Z + \Theta\hat{Z}E = 180^o$ ή $30^o + 120^o + \Theta\hat{Z}E = 180^o$ ή $\Theta\hat{Z}E = 30^o$.

γ) Επειδή $\Theta\hat{E}Z = \Theta\hat{Z}E = 30^o$, το τρίγωνο ΘΖΕ είναι ισοσκελές, άρα ΘΕ = ΘΖ.

Όμως το ΑΘΖ είναι ισόπλευρο, όπως έχει αποδειχθεί στο α), άρα ΘΖ = ΘΑ ως πλευρές ισόπλευρου και άρα ισχύει ότι ΘΕ = ΘΖ = ΘΑ. Όμως ΑΕ = ΘΑ + ΘΕ ή ΑΕ = 2ΘΖ .

δ) Από τα προηγούμενα $AE = EB = \frac{AB}{2}$ και $\Theta E = \frac{AE}{2}$, άρα $\Theta E = \frac{AB}{4}$.

$\Theta B = \Theta E + EB = \frac{AB}{4} + \frac{AB}{2} = \frac{3AB}{4}$.

Άρα 4ΘΒ = 3ΑΒ.