ΛΥΣΗ

α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

- ΟΑ=ΟΒ=ρ_2
- ΟΚ=ΠΛ=ρ_1
- $\widehat{\mathrm{O}}$ κοινή γωνία

Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία, και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα έχουν ίσες και τις τρίτες πλευρές τους, δηλαδή ΑΛ=ΒΚ.

β) Επειδή ΟΑ=ΟΒ, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $O\widehat{A}B = O\widehat{B}A$ γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου (1).

Επίσης $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = \mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$ (από την ισότητα των τριγώνων ΑΟΛ και ΒΟΚ) (2).

$\mathrm{O}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} - \mathrm{O}\widehat{\mathrm{A}}\Lambda = \mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} - \mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, άρα $\mathrm{P}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{P}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ (ίσες ως διαφορές ίσων γωνιών).

Οπότε το τρίγωνο ΡΑΒ έχει δύο γωνίες ίσες οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ και ίσες πλευρές τις ΡΑ και ΡΒ.

γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

- ΟΑ=ΟΒ=ρ_2
- ΟΡ κοινή πλευρά
- ΡΑ=ΡΒ (από β) το ΑΡΒ είναι ισοσκελές τρίγωνο)

Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ) . Άρα θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΡΑ και ΡΒ αντίστοιχα, δηλαδή $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{P} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{P}$, επομένως η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{\mathrm{O}}y$.