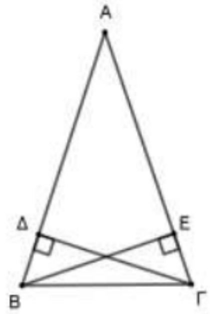
ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90^o$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$, γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Επομένως θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ και $\mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ αντίστοιχα. Δηλαδή ΒΕ=ΓΔ.

β) Αντίστροφη πρόταση: Αν δύο ύψη ενός τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη αυτά.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}} = 90^o$ αφού ΓΔ, ΒΕ ύψη.
- ΒΓ κοινή πλευρά
- ΒΕ=ΓΔ (υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΕ και ΓΔ αντίστοιχα. Δηλαδή $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$ ή $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.