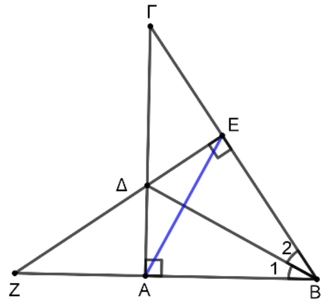
ΛΥΣΗ

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\mathrm{o}}$, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ και ΔΕ το κάθετο τμήμα στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ζ.

α)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΔ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{E}} = 90^{\mathrm{o}}$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{B}}$.

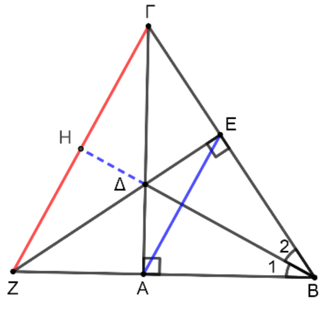
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα είναι ίσες και οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΒΕ στις οποίες είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:

- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{E}} = 90^{\mathrm{o}}$
- ΑΒ=ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές α))
- $\widehat{\mathrm{B}}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίση μία κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

γ)



Ισχύει ότι:

- BA=BE (ABE ισοσκελές) (1)
- ΔA=ΔE (από α) τρίγωνο AΔB=τρίγωνο BΔE)

Άρα τα σημεία B και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος AE, οπότε η BΔ είναι μεσοκάθετος του AE. Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και BEZ είναι ίσα, από το β) θα έχουν ίσες υποτείνουσες, δηλαδή BΓ=BZ (2). Άρα το τρίγωνο BΓZ είναι ισοσκελές. Η διχοτόμος BΔ της γωνίας $\widehat{B}$ στο τρίγωνο BZΓ τέμνει την πλευρά ΓZ στο σημείο H και επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΓZ, το τμήμα BH είναι ύψος και διάμεσος της πλευράς ΓZ. Δηλαδή η ευθεία BΔ είναι μεσοκάθετος του ΓZ.

δ) Επειδή AE⊥BΔ και ZΓ⊥BΔ, είναι AE//ZΓ. Επίσης οι ZA και ΓE δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο B. Άρα το AEΓZ είναι τραπέζιο. Ισχύει ότι:

EΓ=BΓ-BE=BZ-AB=AZ (από τις (1) και (2)). Συνεπώς το τετράπλευρο AEΓZ είναι ισοσκελές τραπέζιο.