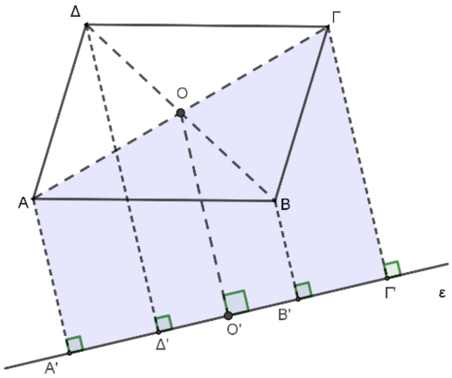
ΛΥΣΗ

α) Είναι ΑΑ΄//ΒΒ΄//ΓΓ΄//ΔΔ΄//ΟΟ΄ ως κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία (ε).

i.



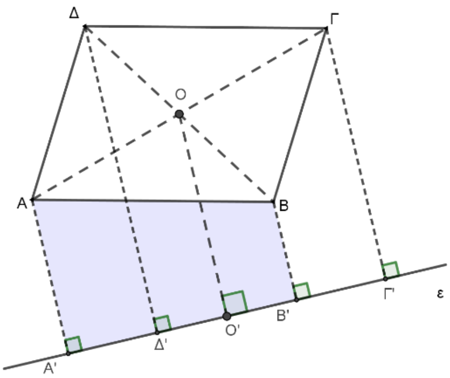
ii.

Η ευθεία (ε) δεν είναι παράλληλη στη διαγώνιο ΑΓ γιατί: Αν είναι ε//ΑΓ τότε, επειδή επιπλέον έχουμε ότι ΑΑ΄//ΓΓ΄, το ΑΑ΄ΓΓ΄ θα είναι παραλληλόγραμμο και επομένως ΑΑ΄=ΓΓ΄ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Όμως ΑΑ΄=3≠5=ΓΓ΄, άτοπο.

Από την παραλληλία ΑΑ΄ και ΓΓ΄ το ΑΑ΄Γ΄Γ είναι τραπέζιο με διάμεσο ΟΟ΄.

Άρα $\text{ΟΟ}' = \frac{\text{ΑΑ}'+\text{ΓΓ}'}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$.

ii.

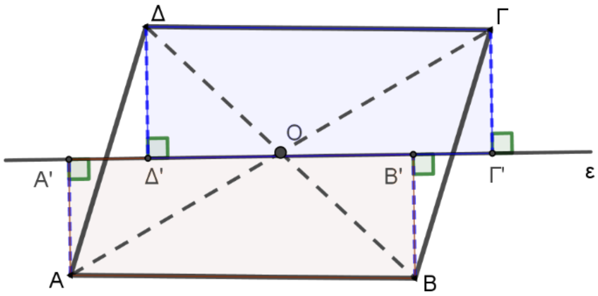


Η ευθεία (ε) δεν είναι παράλληλη ούτε στη διαγώνιο ΒΔ, γιατί αν ήταν, τότε όπως προηγουμένως θα είχαμε ότι το ΒΟΟ΄Β΄ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ΒΒ΄=ΟΟ΄, άτοπο γιατί ΒΒ΄=2≠4=ΟΟ΄.

Από την παραλληλία ΒΒ΄ και ΔΔ΄, το ΒΒ΄Δ΄Δ είναι τραπέζιο με διάμεσο το ΟΟ΄, άρα:

$$\text{ΟΟ}' = \frac{\text{ΒΒ}' + \text{ΔΔ}'}{2} \quad \text{ή} \quad 4 = \frac{2 + \text{ΔΔ}'}{2} \quad \text{ή} \quad 8 = 2 + \text{ΔΔ}' \quad \text{ή} \quad \text{ΔΔ}' = 6$$

β) Αν η (ε) είναι παράλληλη στις ΑΒ και ΓΔ και διέρχεται από το κέντρο Ο, τότε η (ε) θα είναι μεσοπαράλληλη των ΑΒ, ΓΔ.



Οπότε τα τετράπλευρα ΑΑ΄Β΄Β και ΔΔ΄Γ΄Γ επειδή έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες θα είναι παραλληλόγραμμα με μία ορθή γωνιά οπότε είναι ορθογώνια.

Τα τρίγωνα ΟΑΑ΄ και ΟΓΓ΄ είναι ορθογώνια και έχουν ΟΑ=ΟΓ γιατί το Ο είναι το κέντρο του ΑΒΓΔ και $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}' = \Gamma\widehat{\mathrm{O}}\Gamma'$ ως κατακορυφήν γωνίες. Οπότε είναι ίσα γιατί έχουν υποτείνουσες ίσες και μία οξεία γωνία ίση. Άρα ΑΑ΄=ΓΓ΄ και επειδή ΑΑ΄=ΒΒ΄ και ΓΓ΄=ΔΔ΄ ως απέναντι πλευρές των ορθογωνίων ΑΑ΄Β΄Β και ΓΓ΄Δ΄Δ, συμπεραίνουμε ότι ΑΑ΄=ΒΒ΄=ΓΓ΄=ΔΔ΄.