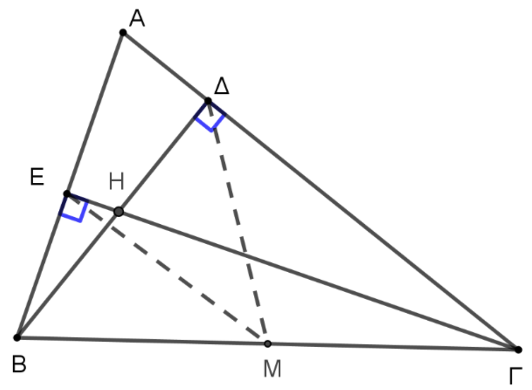
ΛΥΣΗ

Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, άρα ΒΔ⊥ΑΒ και ΓΕ⊥ΑΓ, επομένως

$\mathrm{B\hat{E}\Gamma} = \mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = 90^o$.

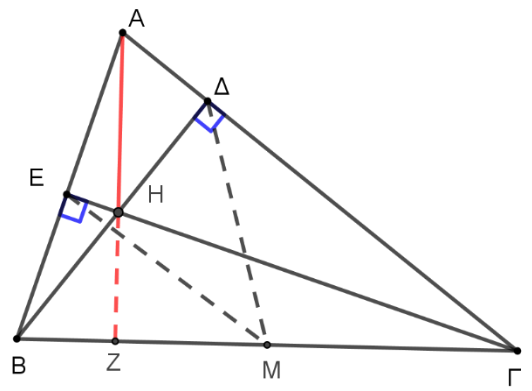
**α)**

i.




Στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ τα τμήματα ΜΕ, ΜΔ είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στην κοινή υποτείνουσα ΒΓ των δύο τριγώνων. Οπότε $\mathrm{M\Delta} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ και $\mathrm{ME} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, άρα ΜΔ=ΜΕ.

ii.




Επειδή τα δυο ύψη ΒΔ και ΓΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Η, το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Οπότε το τμήμα ΑΗ προεκτεινόμενο προς το μέρος του Η θα τέμνει τη ΒΓ σε σημείο Ζ και το τμήμα ΑΖ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Άρα η ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ για τις οξείες γωνίες του ισχύει ότι:

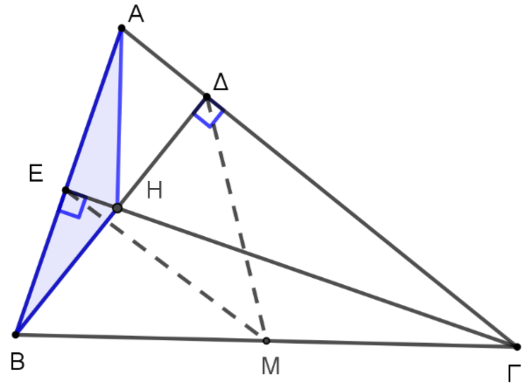
$$\mathrm{A\hat{H}\Delta} + \mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^o \ \text{ή} \ \ \mathrm{A\hat{H}\Delta} = 90^o - \mathrm{H\hat{A}\Delta} \ (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ για τις οξείες γωνίες του ισχύει ότι:

$$\hat{\Gamma} + \mathrm{Z\hat{A}\Gamma} = 90^o \ \ \text{ή} \ \ \hat{\Gamma} = 90^o - \mathrm{Z\hat{A}\Gamma} \ \text{ή} \ \ \hat{\Gamma} = 90^o - \mathrm{H\hat{A}\Delta} \ (2)$$

Από τις (1), (2) βρίσκουμε $\mathrm{A\hat{H}\Delta} = \hat{\Gamma}$.

**β)**




Στο τρίγωνο ΑΒΗ το ύψος στην ΑΒ είναι το ΗΕ και το ύψος στην ΒΗ είναι το ΑΔ οι φορείς των οποίων τέμνονται στο Γ. Άρα το σημείο Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ.