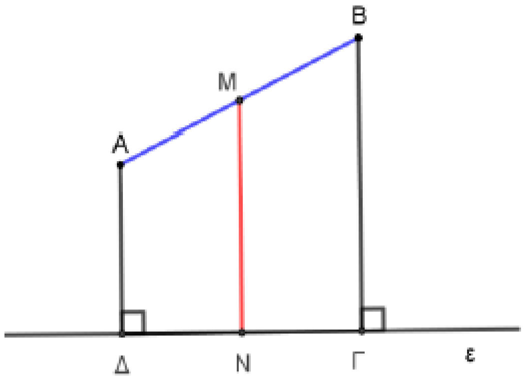
ΛΥΣΗ

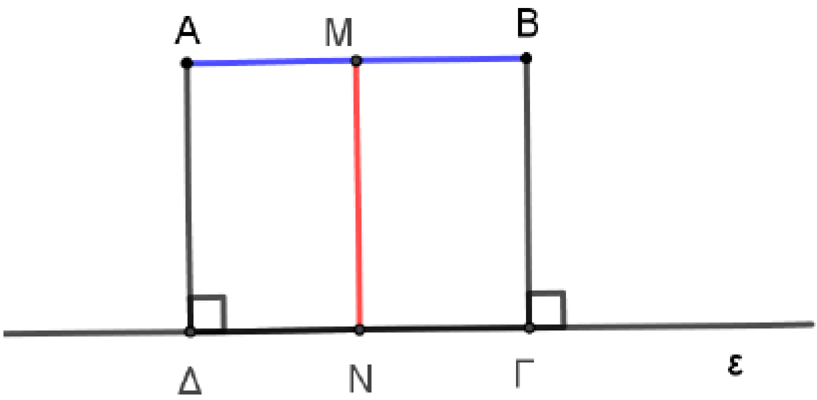
α) Επειδή ΑΔ⊥ε και ΒΓ⊥ε, τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι κάθετα στην ίδια ευθεία οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα. Δηλαδή ΑΔ//ΒΓ.

i.

1) Αν ΑΔ<ΒΓ, τότε ΑΔ≠ΒΓ άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ δεν είναι παραλληλόγραμμο οπότε έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες και είναι τραπέζιο.



2) Αν ΑΔ=ΒΓ, τότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\hat{\Delta} = 90^o$ (ΑΔ⊥ε), είναι τελικά ορθογώνιο.



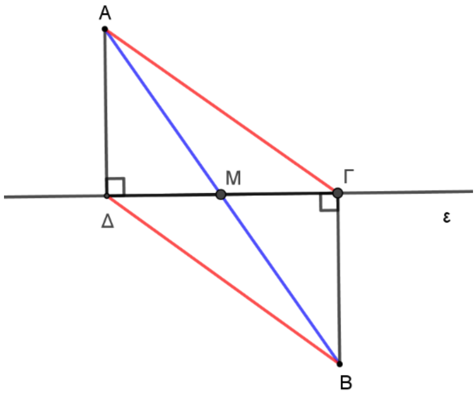
ii.

1) Όταν το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο, τότε το ΜΝ είναι διάμεσός του, άρα:

$\text{ΜΝ} = \frac{\text{ΑΔ}+\text{ΒΓ}}{2}$.

2) Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε και τα ΑΜΝΔ, ΜΝΓΒ είναι ορθογώνια. Γιατί ΑΜ=ΔΝ ίσα και παράλληλα ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΔΓ. Ομοίως ΜΒ=//ΝΓ και τότε ΜΝ=ΑΔ=ΒΓ.

β) Έστω ότι η (ε) τέμνει το ΑΒ στο μέσο του Μ.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΜΒΓ:

- $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma} = 90^o$
- AM=MB, διότι Μ μέσο της ΑΒ
- $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Delta = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$, ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τα άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή ΑΔ=ΒΓ.

Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ θα είναι παραλληλόγραμμο αφού δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Επειδή ΑΜ>ΜΔ και ΜΒ>ΜΓ θα είναι ΑΜ+ΜΒ>ΜΔ+ΜΓ, οπότε ΑΒ>ΓΔ.

Άρα το ΑΓΒΔ δεν έχει ίσες διαγώνιες οπότε δεν είναι ορθογώνιο.