ΛΥΣΗ

α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } \widehat{\mathrm{B}} + 2\widehat{\mathrm{B}} = 180^o \text{ ή } 3\widehat{\mathrm{B}} = 180^o \text{ ή } \widehat{\mathrm{B}} = 60^o$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ (ΑΔ ύψος, άρα ΑΔ⊥ΒΓ) για τις οξείες γωνίες του ισχύει:

$$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta + \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 90^o \text{ ή } \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 30^o$$

Επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$, ισχύει ότι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Επειδή $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 30^o$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, οπότε ΑΖ=ΒΖ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ είναι $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\mathrm{Z}\Delta = \frac{\mathrm{BZ}}{2}$.

Τότε ΑΔ=ΑΖ+ΖΔ και ΑΖ=ΒΖ από το α)i, οπότε $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{BZ} + \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \frac{3}{2}\mathrm{BZ}$.

β) Αν το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 60^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ για τις οξείες γωνίες του ισχύει: $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + \widehat{\Gamma} = 90^o$ άρα $\widehat{\Gamma} = 30^o$.

Επίσης από το α)i. έχουμε $\widehat{\mathrm{B}} = 60^o$ οπότε:

$$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180^o \text{ ή } \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma + 60^o + 30^o = 180^o \text{ ή } \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 90^o$$