ΛΥΣΗ

α) Επειδή ΒΓ $\perp$ ΟΑ, οπότε και ΒΓ $\perp$ ΟΜ, τότε το ΟΜ είναι απόστημα της χορδής ΒΓ, άρα το Μ είναι μέσο της.

Από υπόθεση το Μ είναι μέσο και της ΟΑ, οπότε τα τμήματα ΟΑ και ΒΓ του ΑΓΟΒ διχοτομούνται. Άρα το ΑΓΟΒ είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοί του ΟΑ, ΒΓ διχοτομούνται.

Επιπλέον ΟΑ$\perp$ ΒΓ**,** δηλαδή οι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ είναι κάθετες. Άρα το ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο ΒΟΑ το τμήμα ΒΜ είναι ύψος (ΒΓ $\perp$ ΟΑ από δεδομένα) και διάμεσος (ΒΓ $\perp$ ΟΑ και Μ μέσο ΟΑ από δεδομένα), άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΒΟ = ΒΑ.

Τότε ΟΑ = ΒΟ = ΒΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΒΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως:

$$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 60^{o}$$

Όμοια, το ΓΜ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΟΓΑ, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΟΑ = ΟΓ= ρ.

Τότε όμως ΟΑ = ΟΓ = ΓΑ = ρ, οπότε το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισόπλευρο και επομένως:

$$\Gamma\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{O}\widehat{\Gamma}\mathrm{A} = 60^{o}$$

Είναι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Gamma$= 60^{o} + 60^{o} = 120^{o} = $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$, επειδή $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Gamma$ = $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΓΟΒ.