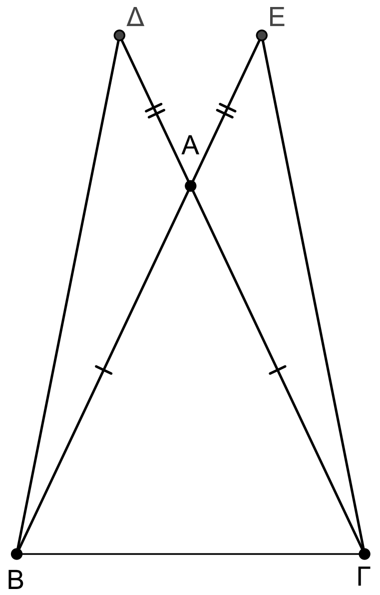
ΛΥΣΗ

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και σημεία Ε, Δ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΕ =ΑΔ.



α) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΔ από υπόθεση τότε: ΑΒ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΔ, άρα ΒΕ = ΓΔ.

β) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, από υπόθεση
- ΑΔ = ΑΕ, από υπόθεση
- $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$, ως κατακορυφήν γωνίες.

Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα είναι ίσα (ΠΓΠ), οπότε ΒΔ = ΓΕ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$, $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ αντίστοιχα.

γ) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε: $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}$ (1) ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}$ (2), ως γωνίες της βάσης του ΒΓ. Οπότε $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} + \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{A} + \mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{A}$ ή $\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$.