

ΛΥΣΗ

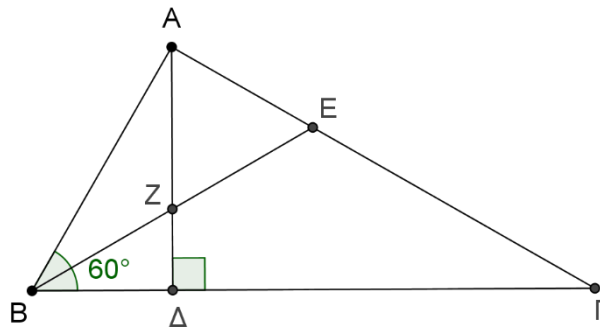
α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \widehat{B} + 2\widehat{B} = 180^\circ \text{ ή } 3\widehat{B} = 180^\circ \text{ οπότε } \widehat{B} = 60^\circ \text{ (1)}$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 3\widehat{\Gamma} + 60^\circ + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } 4\widehat{\Gamma} = 120^\circ, \text{ οπότε } \widehat{\Gamma} = 30^\circ \text{ (2)}$$

Είναι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\widehat{B}$ από την υπόθεση, οπότε $\widehat{A} + 30^\circ = 2 \cdot 60^\circ$, άρα $\widehat{A} = 90^\circ$ (3).



Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΕ έχουμε:

$\widehat{A} + \widehat{ABE} + \widehat{AEB} = 180^\circ$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ (σχέση 3) και $\widehat{ABE} = \frac{\widehat{B}}{2}$ επειδή η ΒΕ είναι διχοτόμος (από υπόθεση) όπου $\widehat{B} = 60^\circ$ (σχέση 1), οπότε:

$$90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{AEB} = 180^\circ \text{ ή } \frac{60^\circ}{2} + \widehat{AEB} = 90^\circ \text{ ή } 30^\circ + \widehat{AEB} = 90^\circ, \text{ άρα } \widehat{AEB} = 60^\circ \text{ (4)}$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ έχουμε:

$\widehat{\Gamma\Delta A} + \widehat{\Delta} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ με $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ επειδή η ΑΔ είναι ύψος και $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$ (σχέση 2), οπότε:

$$\widehat{\Gamma\Delta A} + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \text{ ή } \widehat{\Gamma\Delta A} + 120^\circ = 180^\circ, \text{ άρα } \widehat{\Gamma\Delta A} = 60^\circ \text{ (5)}$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΕ έχουμε:

$\widehat{Z\Delta E} + \widehat{Z\Delta A} + \widehat{A\Delta Z} = 180^\circ$ με $\widehat{Z\Delta E} = \widehat{\Gamma\Delta A} = 60^\circ$ (σχέση 5) και $\widehat{A\Delta Z} = \widehat{AEB} = 60^\circ$ (σχέση 4), οπότε:

$$60^\circ + \widehat{A\Delta Z} + 60^\circ = 180^\circ \text{ ή } 120^\circ + \widehat{A\Delta Z} = 180^\circ, \text{ άρα } \widehat{A\Delta Z} = 60^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΖΕ έχει όλες τις γωνίες του ίσες οπότε είναι ισόπλευρο.