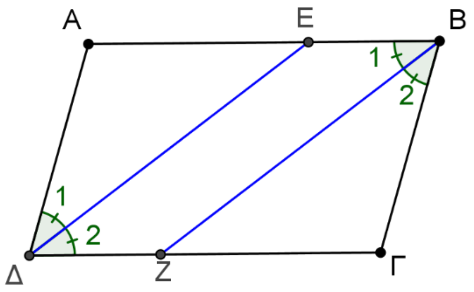
ΛΥΣΗ

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΔΕ, ΒΖ οι διχοτόμοι των γωνιών του $\widehat{\Delta}$, $\widehat{\mathrm{B}}$ αντίστοιχα. Αφού $\widehat{\Delta}$ = $\widehat{\mathrm{B}}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τότε και τα μισά τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = \widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_2$ (1).



α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ έχουν:

- ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου,
- $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_2$, από σχέση (1),
- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma}$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Οπότε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.

β) Από την προηγούμενη ισότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΒΓΖ προκύπτει ότι:

- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες, δηλαδή ΔΕ = ΒΖ (2) καθώς και
- οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{\mathrm{B}}_2$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΕ = ΓΖ (3).

Επειδή είναι ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και ΑΕ = ΓΖ από σχέση (3), τότε ΒΕ = ΑΒ – ΑΕ = ΓΔ – ΓΖ = ΔΖ, δηλαδή ΒΕ = ΔΖ (4)

Οπότε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΔΕ, ΒΖ και ΒΕ, ΔΖ ίσες (σχέσεις 2 και 4).