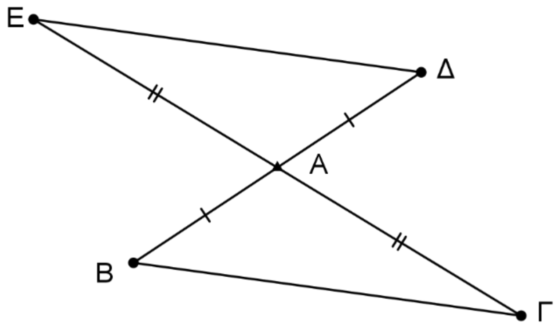
ΛΥΣΗ

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τμήματα ΑΔ = ΑΒ, ΑΕ = ΑΓ στις προεκτάσεις προς το Α των πλευρών ΒΑ, ΓΑ αντίστοιχα.

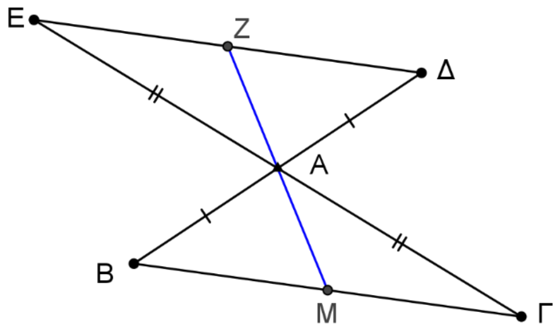


α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ:

- ΑΔ = ΑΒ από υπόθεση,
- ΑΕ = ΑΓ από υπόθεση,
- $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ), οπότε ΒΓ = ΔΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ και $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ των ίσων τριγώνων.

β) Έστω ΑΜ η διάμεσος και Ζ το σημείο στο οποίο η προέκτασή της ΑΜ τέμνει την ΕΖ.



i. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΔΖ έχουν:
    - ΑΒ = ΑΔ από υπόθεση,
    - $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M} = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$ ως κατακορυφήν γωνίες,
    - $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta}$, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΓ και ΑΕ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ του α) ερωτήματος.

    Οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΔΖ είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΔΖ προκύπτει ότι και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ και $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$ είναι ίσες, δηλαδή

ΖΔ = ΒΜ με ΒΜ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$

Οπότε και ΖΔ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{2}$ διότι είναι ΒΓ = ΔΕ από το α) ερώτημα.