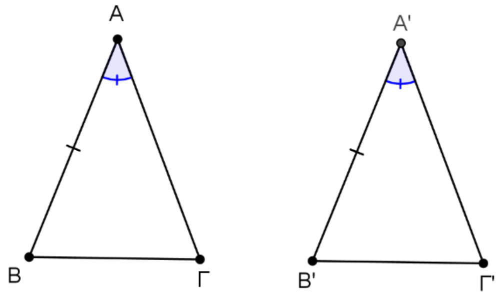
ΛΥΣΗ

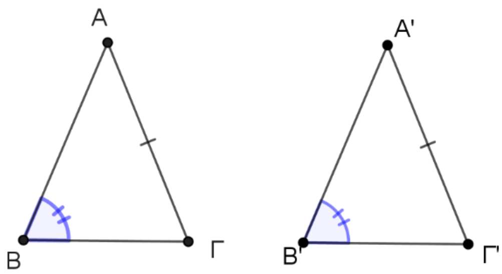
Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Α'Β'Γ' με Α'Β'= Α'Γ'.

α) Έστω ότι τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΒ = Α'Β' και $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν το καθένα ένα ζεύγος ίσων πλευρών τις ΑΒ, ΑΓ και Α'Β', Α'Γ' αντίστοιχα. Αφού είναι ΑΒ = Α'Β' (υπόθεση) θα είναι επίσης και ΑΓ = Α'Γ'. Οπότε τα τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες (τις ίσες τους) και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\mathrm{A}}'$ ίσες από την υπόθεση (ΠΓΠ), άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Έστω ότι τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΓ = Α'Γ' και $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}'$.



Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ένα ζεύγος ίσων πλευρών τις ΑΒ, ΑΓ και Α'Β', Α'Γ' αντίστοιχα. Αφού είναι ΑΓ = Α'Γ' θα είναι επίσης και ΑΒ = Α'Β'.

Επίσης τα δυο τρίγωνα έχουν ένα ζεύγος ίσων γωνιών, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{B}}' = \widehat{\Gamma}'$ αντίστοιχα ως γωνίες στις βάσεις ΒΓ και Β'Γ' κάθε ισοσκελούς τριγώνου. Επειδή $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}'$, από την υπόθεση, θα είναι και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$. Έχοντας όμως τα τρίγωνα τις δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, θα είναι ίσες και οι τρίτες γωνίες τους, δηλαδή $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$. Τελικά τα τρίγωνα έχουν:

- ΑΓ = Α'Γ'
- $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$
- $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}}'$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ).