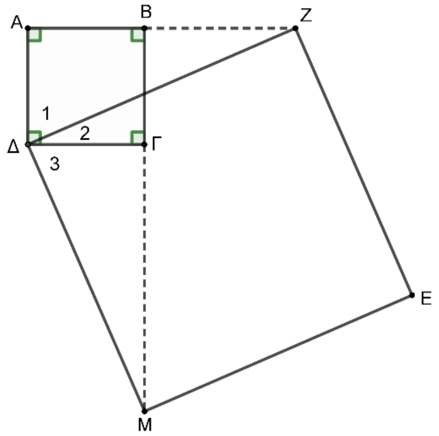
ΛΥΣΗ



α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουμε:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

Αν $Α\widehat{Δ}Ζ = \widehat{Δ}_1$ και $Γ\widehat{Δ}Μ = \widehat{Δ}_3$, τότε $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

β) Από την υπόθεση έχουμε ότι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο.

Για να είναι το ΔΜΕΖ τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Είναι $Μ\widehat{Δ}Ζ = \widehat{Δ}_2 + \widehat{Δ}_3$, όμως $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_3$ από α) ερώτημα, οπότε $Μ\widehat{Δ}Ζ = \widehat{Δ}_2 + \widehat{Δ}_1 = Α\widehat{Δ}Γ = 90°$. Συνεπώς το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα (ερώτημα α), θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, δηλαδή ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Συνεπώς το ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο.

γ) Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε $Α\widehat{Β}Γ = 90°$ άρα και $Μ\widehat{Β}Ζ = 90°$ ως παραπληρωματική της.

Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Ζ\widehat{Ε}Μ = 90°$. Άρα $Μ\widehat{Β}Ζ + Ζ\widehat{Ε}Μ = 90° + 90° = 180°$.

Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΒΖΕΜ ισχύει ότι:

$Β\widehat{Ζ}Ε + Ζ\widehat{Ε}Μ + Ε\widehat{Μ}Β + Μ\widehat{Β}Ζ = 360^0$ ή $Β\widehat{Ζ}Ε + Ε\widehat{Μ}Β + 180^0 = 360^0$ ή $Β\widehat{Ζ}Ε + Ε\widehat{Μ}Β = 360^0 - 180^0 = 180^0$

Άρα οι γωνίες $Β\widehat{Ζ}Ε$ και $Ε\widehat{Μ}Β$ είναι παραπληρωματικές.