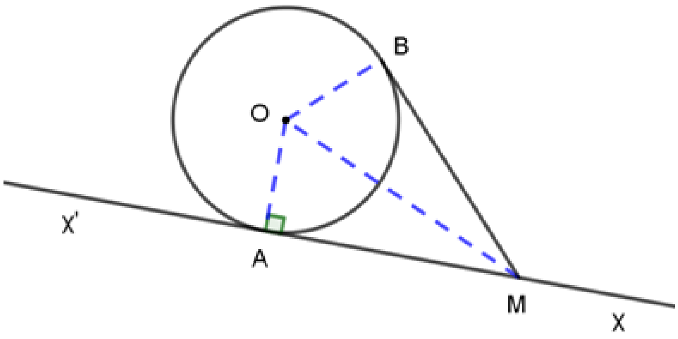
ΛΥΣΗ

Έστω κύκλος (O,R), ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α, τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας και τυχαίο σημείο Β του κύκλου τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΑ.



α) Επειδή η ευθεία x΄x έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α, αυτή θα είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Άρα ΟΑ $\perp$ ΜΑ.

Τα τρίγωνα ΜΟΒ και ΜΟΑ έχουν:

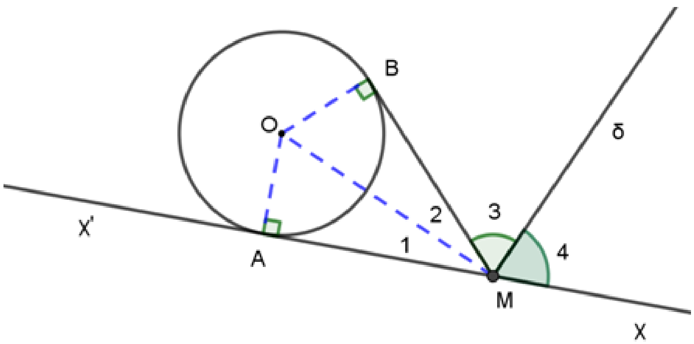
- ΜΟ, κοινή πλευρά
- ΟΒ = ΟΑ, ως ακτίνες του κύκλου (O,R)
- ΜΒ = ΜΑ, από την υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς (κριτήριο ισότητας Π-Π-Π), οπότε είναι ίσα. Απέναντι από την πλευρά ΟΜ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες γωνίες, οπότε $\widehat{A}$ = $\widehat{B}$.

Επειδή $\widehat{A}$ = 90° συμπεραίνουμε ότι $\widehat{B} = 90°$.

Άρα, το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R).

β) Έστω Μδ η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx.



Τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενα του κύκλου (O,R).

Η ΜΟ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ, οπότε $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Επειδή Μδ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx έχουμε $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_4$.

Είναι $A\widehat{M}x = 180°$ οπότε $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 + \widehat{M}_4 = 180°$ ή $2\,\widehat{M}_2 + 2\,\widehat{M}_3 = 180°$ ή $\widehat{M}_2 + \widehat{M}_3 = 90°$, δηλαδή $O\widehat{M}δ = 90°$. Άρα η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ.

γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ και η διχοτόμος Μδ τέμνονται από το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ. Αν οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται από τις ΟΒ και Μδ με την τέμνουσά τους ΟΜ έχουν άθροισμα μικρότερο από 180°, τότε το ΟΒ και η Μδ θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας ΟΜ που βρίσκονται οι γωνίες.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ σχηματίζει με το ΟΜ τη γωνία $B\widehat{O}M$.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ σχηματίζει με τη διχοτόμο Μδ τη γωνία $O\widehat{M}δ$.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}δ < 180°$.

- Αν $B\widehat{O}M + O\widehat{M}δ = 180°$ και επειδή $O\widehat{M}δ = 90°$, αφού από β) ερώτημα είναι η Μδ είναι κάθετη στη ΜΟ, τότε $B\widehat{O}M = 90^0$. Αυτό είναι αδύνατο ,γιατί τότε το τρίγωνο ΟΒΜ θα είχε δυο γωνίες ορθές την $O\widehat{M}δ$ και $\widehat{B}$, αφού $\widehat{B} = 90°$ από α) ερώτημα.
- Αν $B\widehat{O}M + O\widehat{M}δ > 180°$ αυτό είναι αδύνατο, γιατί το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου (στην περίπτωσή μας το τρίγωνο ΜΟΔ) είναι μικρότερο των 180°.

Επομένως, ισχύει ότι $B\widehat{O}M + O\widehat{M}δ < 180^0$.