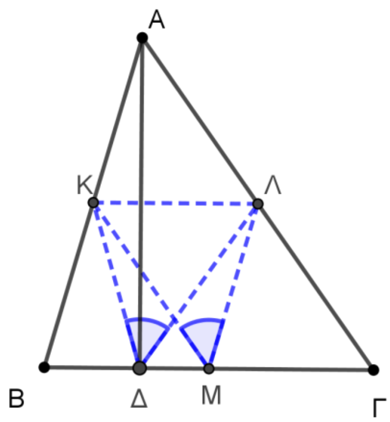
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Κ,Λ,Μ των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα και φέρουμε το ύψος ΑΔ.



α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Κ είναι μέσο του ΑΒ και το Λ είναι μέσο του ΑΓ. Άρα, ΚΛ//ΒΓ (1), επειδή το ΚΛ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Λ είναι μέσο του ΑΓ και το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Άρα, ΛΜ = $\frac{AB}{2}$ (2), επειδή το ΛΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ**.** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι ΔΚ = $\frac{AB}{2}$ (3), επειδή η ΚΔ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ΑΒ**.** Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι ΛΜ = ΚΔ. (4)

ii. Τα σημεία Δ και Μ δεν ταυτίζονται γιατί αν το μέσο Μ της ΒΓ ταυτιζόταν με το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ, τότε το ύψος ΑΔ θα ήταν και διάμεσος, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ θα ήταν ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, πράγμα άτοπο γιατί από την υπόθεση είναι ΑΒ < ΑΓ. Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τετράπλευρο.

   Επειδή τα Λ, Μ ενώνουν μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, θα είναι ΛΜ // ΑΒ και η ΔΚ δεν είναι παράλληλη στην ΑΒ (αφού την τέμνει στο Κ). Συνεπώς οι απέναντι πλευρές ΛΜ και ΚΔ του ΚΛΜΔ δεν είναι παράλληλες.

   Από το α) ερώτημα έχουμε ότι ΚΛ // ΒΓ, οπότε ΚΛ // ΔΜ.

   Επομένως το ΚΛΜΔ είναι τραπέζιο, γιατί έχει μόνο δυο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Και επειδή από τη σχέση (4) είναι ΛΜ = ΚΔ, άρα το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Τα τρίγωνα ΚΔΛ και ΛΜΔ έχουν, τις πλευρές ΚΔ και ΛΜ ίσες (από 4), τις πλευρές ΚΜ και ΔΛ ίσες ως διαγώνιοι του ισοσκελούς τραπεζίου ΚΛΜΔ και την πλευρά ΚΛ κοινή. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες. Άρα και $\mathrm{K}\widehat{\Delta}\Lambda=\mathrm{K}\widehat{\mathrm{M}}\Lambda$ ως οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από την κοινή τους πλευρά ΚΛ.