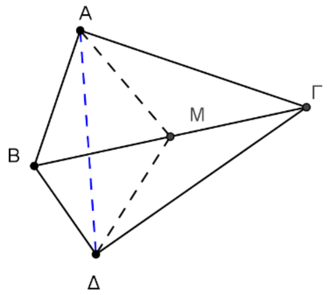
ΛΥΣΗ



α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΔΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ (1) το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι $Μ\widehat{Α}Γ = Μ\widehat{Γ}Α$ (2)

Επειδή ΔΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΓ (3) το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι $Μ\widehat{Δ}Γ = Μ\widehat{Γ}Δ$ (4)

Η γωνία $Α\widehat{Μ}Β$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΜΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (2) έχουμε:

$Α\widehat{Μ}Β = Μ\widehat{Α}Γ + Μ\widehat{Γ}Α$ ή $Α\widehat{Μ}Β = 2Μ\widehat{Γ}Α$ (4)

Η γωνία $Β\widehat{Μ}Δ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (4) έχουμε

$Β\widehat{Μ}Δ = Μ\widehat{Δ}Γ + Μ\widehat{Γ}Δ$ ή $Β\widehat{Μ}Δ = 2Μ\widehat{Γ}Δ$ (5)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (4), (5) και βρίσκουμε

$Α\widehat{Μ}Β + Β\widehat{Μ}Δ = 2Μ\widehat{Γ}Α + 2Μ\widehat{Γ}Δ$ ή $Α\widehat{Μ}Δ = 2Α\widehat{Γ}Δ$

γ) Το Μ είναι μέσο της ΒΓ, άρα ΜΒ = ΜΓ. Όμως ΑΜ = ΜΓ από (1) και ΔΜ = ΜΓ από (3), άρα ΜΒ = ΜΓ =ΜΑ = ΑΜ = ΔΜ. Οπότε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ ισαπέχουν από το σημείο Μ, άρα θα βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το μέσο Μ της ΒΓ.