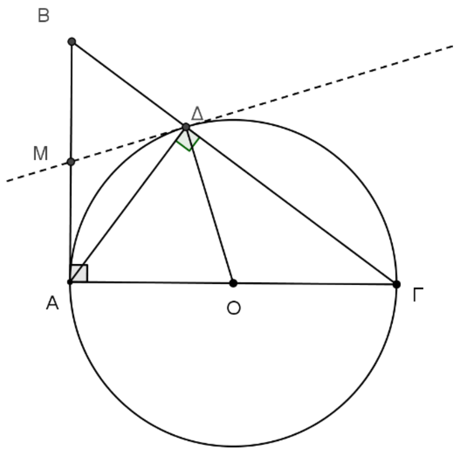
ΛΥΣΗ



α) Φέρνουμε την ΟΔ. Είναι ΟΔ = ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου κέντρου Ο με διάμετρο την πλευρά ΑΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οπότε στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΟΔ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΓ, αφού το Ο ως κέντρο είναι το μέσο, και ισχύει ΟΔ = $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$. Επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΑΓ ορθή τη γωνία $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Gamma$, άρα οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta + \widehat{\Gamma} = 90^o$ ή $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (1).

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή

$\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 90^o$ ή $\widehat{\mathrm{B}} = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει: $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \widehat{\mathrm{B}}$.

β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ ως ακτίνες του κύκλου, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΓΔ θα είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\Gamma} = \mathrm{O}\widehat{\Delta}\Gamma$ (3).

Επειδή η ΔΜ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ, η ακτίνα στο σημείο επαφής θα είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ΟΔ ⊥ ΔΜ), οπότε $\mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{O} = 90^0$ (4)

Τότε $\mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 180^o - \mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{O} - \mathrm{O}\widehat{\Delta}\Gamma = 180^o - 90^o - \widehat{\Gamma}$ λόγω των σχέσεων (3) και (4), δηλαδή τελικά $\mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 90^o - \widehat{\Gamma}$ (5).

Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι θα είναι $\mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = \widehat{\mathrm{B}}$. Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΒ (3).

γ) Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 90^0$, θα είναι ΜΑ ⊥ ΟΑ και ΟΔ ⊥ ΔΜ, οπότε τα ΜΑ και ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα θα είναι ίσα, δηλαδή ΜΑ = ΜΔ (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.