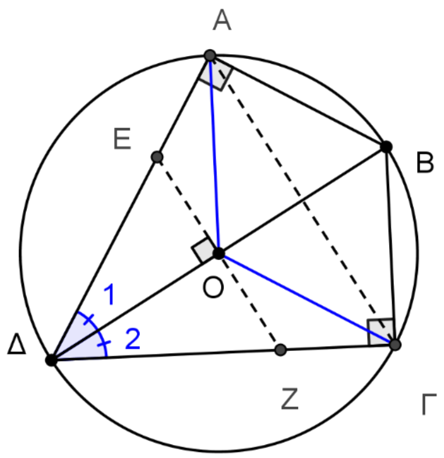
ΛΥΣΗ



α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του ΑΒΓΔ είναι ορθές και η γωνία του $\widehat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας του $\widehat{\Delta}$, δηλαδή $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^o$ και $\widehat{B} = 2\widehat{\Delta}$.

Για τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ισχύει ότι:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^o$ ή $90^o + 90^o + 2\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta} = 360^o$ ή $3\widehat{\Delta} = 180^o$ ή $\widehat{\Delta} = 60^o$, οπότε $\widehat{B} = 120^o$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90^o$, την πλευρά ΒΔ κοινή και τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ίσες. Συνεπώς είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, συνεπώς $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών ΑΒ και ΒΓ. Άρα η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\widehat{\Delta}_1 = \frac{\widehat{\Delta}}{2} = \frac{60^0}{2} = 30^0$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AB = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$ (2), αφού η ΔΒ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο,ρ), γιατί από τα δεδομένα έχουμε ότι διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

Όμοια, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ είναι $\widehat{\Delta}_2 = 30^o$, αφού $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ (σχέση (1)),

οπότε $B\Gamma = \frac{\Delta B}{2} = \frac{2\rho}{2} = \rho$ (3). Επίσης $OA = O\Gamma = \rho$ (4).

Από τις σχέσεις (32), (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

iii. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΟ οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΟ τέμνονται κάθετα, δηλαδή $A\Gamma \perp BO$ (5). Επίσης είναι $EZ \perp BO$ (6) από τα δεδομένα. Οπότε είναι ΑΓ // ΕΖ ως κάθετες στην ίδια ευθεία και επειδή οι φορείς των τμημάτων ΑΕ, ΓΖ τέμνονται στο σημείο Δ, το τετράπλευρο ΑΓΖΕ είναι τραπέζιο.

Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΖ είναι ισοσκελή, γιατί η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας τους $\widehat{\Delta}$ (ερώτημα βi) αλλά και ύψος στις πλευρές ΑΓ και ΕΖ αντίστοιχα (σχέσεις (5), (6))

οπότε ΑΔ = ΓΒ και ΕΔ = ΖΔ.

Είναι ΑΕ = ΑΔ – ΕΔ = ΓΔ – ΖΔ = ΖΓ, άρα το τραπέζιο ΑΓΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.